F 1130/2
L: 040060

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

SERIA ELECTROTEHNICĂ

TOMUL XLV ANUL 1983

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Academician *Radu Voinea*
MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct) ; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente ;* Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan ;* Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific) ; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu ;* Prof. dr. docent *Felicia Cornea ;* Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu ;* Prof. dr. docent *Traian Demian ;* Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan ;* Prof. dr ing. *Octavian Floarea ;* Prof. dr. ing. *Julieta Florea ;* Prof. dr. ing. *Nicolae Geru ;* Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald ;* Prof. dr. *Ion Grădișteanu ;* Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan :* Prof. dr. ing. *Moise Ienciu ;* Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu ;* Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu ;* Prof. ing. *Jean Moncea ;* Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț ;* Prof. dr. docent *Florea Oprea ;* Prof. dr. ing. *Aurel Oprean ;* Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu ;* Prof. dr. ing. *Ion Popescu ;* Prof. dr. ing. *Mircea Postelnicescu ;* Conf. dr. ing. *Mircea Radeș ;* Conf. dr. ing. *Sorin Roșca ;* Prof. dr. ing. *George Rulea ;* Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu ;* Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru ;* Prof. dr. *Octavian Stănășilă ;* Prof. dr. ing. *Voicu Tache ;* Prof. dr. docent *Ion Teoreanu ;* Prof. dr. docent *Andrei Țugulea ;* Prof. dr. ing. *Silvia Vacu ;* Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu.*

Editor : Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București.
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ILEXIM import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest ROMANIA

MUSZAKI INFORMACIÓS KÖNYVTÁR 1883 KÖZPONTI ÉS HÖNYVTÁR

Sumar

M. Roşculeţ
Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. VIII. Formule de medie pentru o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic 3

Gabriela Cone, I. M. Popescu, Gh. Stanciu, C. Stoichiţă
Determinarea timpului de viaţă al nivelului $3s_2$ al neonului din rotaţia Faraday la rezonanţă 11

T. Creţu, G. Macarie, P. Ştiucă
Secţiunea de interacţie foton-electron exprimată prin elemente ale matricii de împrăştiere 16

Maria Honciuc, T. Avram
Posibilitatea obţinerii unor imagini electronografice pe cristale lichide 24

V. Scridonesi-Călin, M. Vasiu
Aplicaţii ale statisticii informaţionale Onicescu în mecanica cuantică—energia informaţională Onicescu a localizării cuantice radiale a electronului în atomii hidrogenoizi 30

H. Gavrilă, Gh. Lăzărescu, Doina Gavrilă
Asupra determinării timpului de apariţie a defectelor microstructurale în cablurile electrice cu izolaţia din polietilenă 41

Christiana Popeea
Calculul cîmpului electromagnetic evasistaţionar al unui sistem de conductoare paralele 47

M. Iordache
Algoritm şi program de analiză a circuitelor electrice rezistive nereciproce complexe 57

F. Constantinescu
Condiţii de realizabilitate pentru caracteristicile neliniare concave (l. engleză) . . 68

V. Neagoe, C. Roaţ, C. Popa, P. Vaintraub
Asupra transformării Hadamard pentru compresia benzii de frecvenţă a semnalelor de televiziune (l. engleză) 75

P. Postolache
Estimarea unor caracteristici ale variaţiei aleatoare a parametrilor de calitate a energiei electrice 85

I. Dima, I. Drăghici
Generator de semnal şi amplificator de putere cu amplificatoare operaţionale în structură discretă 90

NOTĂ

M. Ionescu
O schemă de folosire a selsinelor ca traductoare liniare a unghiului de rotaţie în tensiune alternativă 96

Summary

M. Roşculeţ

Integral Operators which Generalized Differential Equations. VIII. Mean Formulas for a Class of Partial Differential Equations of Parabolic Type 3

Gabriela Cone, I. M. Popescu, Gh. Stanciu, C. Stoichiţă

Determination of the Life Time of Ne $3s_2$ Level from Faraday Rotation at Resonance 11

T. Creţu, G. Macarie, P. Ştiucă

Photon-Electron Interaction Section in Terms of S-Matrix Elements 16

M. Honciuc, T. Avram

The Possibility to Obtain Electronographic Images on Liquid Crystals 24

V. Scridonesi-Călin, M. Vasiu

Applications of the Onicescu Informational Statistics in Quantum Mechanics—Onicescu Informational Energy of the Radial Quantum Localization of the Electron in Hydrogen Like Atoms 30

H. Gavrilă, Gh. Lăzărescu, Doina Gavrilă

About the Initiation Time of Microstructural Trees in the Polyethylene Insulation of High Voltage Cables 41

Christiana Popeea

Computation of the Quasistationary Electromagnetic Fields of a System of Parallel Conductors 47

M. Iordache

Analysis Algorithm and Computing Program for Complex Nonreciprocal Electric Resistive Networks 57

F. Constantinescu

Realizability Conditions for Nonlinear Concave Characteristics 68

V. Neagoe, C. Roaţ, C. Popa, P. Vaintraub

On the Hadamard Transform for Bandwidth Compression of Television Signals . 75

P. Postolache

Estimation of the Random Variation of the Electrical Energy Quality Parameters 85

I. Dima, I. Drăghici

Signal Generator and Power Amplifier Made by Using a Discrete Structure Operational Amplifiers 90

NOTE

M. Ionescu

A New Solution of Using the Synchrons as Linear Transducers of Shaft Rotation Angle 96

C. Z.: 517.43
517.9

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE

VIII. Formule de medie pentru o clasă de ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic

M. N. ROȘCULEȚ *

1. Cazul analitic

1. Să considerăm o funcție analitică

$$f(x, y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$$

în stratul complex $T = C^p \times [0, \tau_i]$. Putem scrie

$$I = f\left[x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp\frac{2\pi i r_1}{2m_1}, \ldots, x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp\frac{2\pi i r_p}{2_{mp}}, y + bh^2\right] =$$

$$= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp\frac{2\pi r_1}{2m_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp\frac{2\pi i r_2}{2m_p}\right)}{\alpha_1! \ldots \alpha_p!} \times$$

$$\times \frac{(bh^2)^{n-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}}{(n-\alpha_1 \ldots -\alpha_p)!} \cdot \frac{\partial^n f(x, \tau_i)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p} \partial y^{n-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}}. \qquad (1)$$

unde m_i, r_i, α_i sînt numere întregi, iar a_i, h, m_i numere reale. Să formăm acum expresia

$$A = \frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \ldots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p-1} (I), \qquad (2)$$

și să ținem seama că

$$\frac{1}{2m} \sum_{2m}^{2m-1} \exp\frac{2\pi i r \alpha}{2m} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 2mq \\ 1, & \alpha = 2mq, \ q \text{ întreg}; \end{cases}$$

* Prof. dr., Catedra Matematici III.

pentru $\alpha_1 = 2m_1\alpha_1, \ldots, \alpha_p = 2m_p\alpha_p$, A ia forma reală

$$A = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1^{2m_1\alpha_1} \ldots a^{2m_p\alpha_p}}{(2m_1\alpha_1)! \ldots (2m_p\alpha_p)!} \frac{b^{n-2m_1\alpha_1-\cdots-2m_p\alpha_p}}{(n-2m_1\alpha_1-\ldots-2m_p\alpha_p)} \times$$

$$\times h^{2n} \cdot u_1^{2m_1\alpha_1} \ldots u^{2m_p\alpha_p} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_1^{2m_1\alpha_1} \ldots \partial x_p^{2m_p\alpha_p} \partial y^{n-2m_1\alpha_1-\cdots-2m_p\alpha_p}} \tag{2'}$$

Să notăm

$$Y = Y_{m_1} Y_{m_2} \ldots Y_{m_p}, \tag{3}$$

şi

$$B = B_{m_1} B_{m_2} \ldots B_{m_p}, \tag{4}$$

unde am pus

$$Y_{m_1} = \prod_{h=0}^{2m_1-2} \int_0^{\infty} u_{m_1,h}^{k} \exp(-u_{m_1,k}^{2m_1}) \, du_{m_1,k}, \tag{3'}$$

şi

$$B_{m_1} = (2m_1)^{2m_1-1} \Gamma\left(\frac{1}{2m_1}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2m_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{2m_1-1}{2m_1}\right). \tag{4'}$$

În expresia lui A_0 să facem înlocuirile

$$u_q = u_{m_q,0} \, u_{m_q,1} \ldots u_{m_q,2m_q-1}, \quad q = 1, 2, \ldots, p,$$

apoi să-i aplicăm operatorul

$$\frac{1}{B} Y = \frac{1}{B_{m_1}} Y_{m_1} \ldots \frac{1}{B_{m_p}} Y_{m_p} \tag{5}$$

capătă forma

$$\frac{1}{B} YA = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1^{2m_1\alpha_1} \ldots a^{2m_p\alpha_p}}{(2m_1)^{2m_1\alpha_1} \alpha_1! \ldots (2m_p)^{2m_p\alpha_p} \alpha_p!} \times$$

$$\times h^{2n} \frac{b^{n-2m_1\alpha_1-\cdots-2m_p\alpha_p}}{(n-2m_1\alpha_1-\ldots-2m_p\alpha_p)!} \cdot \frac{\partial^n f(x_1, y)}{\partial x^{2m_1\alpha_1} \ldots \partial x_p^{2m_p\alpha_p} \partial y^{n-2m_1\alpha_1-\cdots-2m_p\alpha_p}} \tag{6}$$

în care dacă înlocuim pe $n - 2m_1\alpha_1 - \ldots - 2m_p\alpha_p$ cu $n - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p$ se transformă în

$$\frac{1}{B} YA = f(x, \eta) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{n!} \left[\left(\frac{a_1}{2m_1}\right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p}\right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p}}{\partial x_p^{2m_p}} + b \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f(x, \eta) \tag{6'}$$

Integralele din operatorul Y cer ca f să fie analitică în steaua S definită de

$$S = S_{m_1} \times S_{m_2} \times \ldots \times S_{m_p} \times (0,\ r_{l1}) \tag{7}$$

unde S_{m_q} este formată din m_q raze echiunghiulare situate în planul complex C, care trec prin punctul $(x_q,\ 0)$, una din raze fiind axa reală. Am demonstrat

Teorema 1. O funcţie analitică pe steaua S definită de (7) satisface relaţia integrală

$$\frac{1}{B} YA = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ y) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{n!} \left[\left(\frac{a_1}{2m_1} \right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p} \right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p}}{\partial x_p^{2m_p}} + b \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f(x,\ y) \tag{6'}$$

unde Y este operatorul (3), B este dat de (4), iar A este dat de (2).

Relaţia integrală (6′) conduce la

Teorema 2. Soluţiile analitice în steaua $S \subset T = C^p \times [0,\ r_{l1}]$, ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\left(\frac{a_1}{2m_1} \right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1} u}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p} \right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p} u}{\partial x_p^{2m_p}} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

verifică formula de medie

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x,\ y) = \frac{1}{B} Y \left[\frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \ldots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f\left(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp \frac{2\pi i r_1}{2m_1},\ \ldots,\ x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp \frac{2\pi i r_p}{2m_p},\ y + b h^2 \right) \right], \tag{9}$$

cu B, Y, S, u aceeaşi ca la teorema 1.

Teorema 3. Soluţiile analitice în steaua S dată de (7) ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\left(\frac{a_1}{2m^2} \right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1} u}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p} \right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p} u}{\partial x_p^{2m_p}} + b \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda u = 0, \tag{10}$$

verifică formula de medie

$$e^{-h^2\lambda} f(x_1,\ \ldots,\ x_p,\ y) = \frac{1}{B} Y \left[\frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \ldots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f\left(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp \frac{2\pi i r_1}{2m_1},\ \ldots,\ x_p a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp \frac{2\pi i r_p}{2m_p},\ y + b h^2 \right) \right] \cdot \tag{11}$$

cu B, Y ş ca la teorema 1. Parametrii a_k, b, h, λ sînt reali.

2. Relaţia integrală (6') conduce şi la

Teorema 4. Soluţiile analitice în steaua S dată de (7) ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$E^{n+1}(u) \equiv \left[\left(\frac{a_1}{2m_1}\right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p}\right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p}}{\partial x_p^{2m_p}} + b\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} u = 0 \quad (12)$$

satisfac relaţia integrală

$$\frac{1}{B} Y\left[\frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \ldots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p-1} f\left(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp\frac{2\pi i r_1}{2m_1}, \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots, x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp\frac{2\pi i r_p}{2m_p}, y + bh^2\right)\right] =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) + \frac{h^2}{1!} Ef(x_1 \ldots, x, y) + \ldots + \frac{h^{2n}}{n!} E^n f(x_1, x_2, \ldots, x_p y) \quad (13)$$

Să introducem mediile iterate

$$\mu_s(f, h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h h' \, \mu_{s-1}(f, h') \, dh' =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_p, y) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \frac{h^2}{1!} E(f) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^s \frac{h^{2n}}{n!} E^{(n)}(f), \quad (14)$$

pornind de la (13) pe care o notăm

$$\mu_0(f, h) = f(x_1, \ldots x_p, y) + \sum_1^n \frac{h^{2k}}{k!} E^{(k)} f(x_1, \ldots, x, y) \quad (15)$$

Din (15) şi (14) cu $s = 1, 2, \ldots, n$ obţinem

Teorema 5. Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale (12) în steaua S definită de (7) verifică formula de medie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \mu_0(f,h) & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(f,h) & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_n(f,h) & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} & \ldots & \frac{1}{(n+1)^n} \end{vmatrix} \quad (16)$$

unde A este determinantul

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 1 & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{(n+1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} & \dots & \frac{1}{(n+1)^n} \end{vmatrix}$$

μ_0 și μ_s sînt date de (15) și (14).
Formula obținută nu este unică deoarece mediile $\mu\,(f, h)$ pot fi înlocuite de

$$\mu_s^*(f, h) = \frac{1}{\Phi(h)} \int_0^h \varphi(h')\, \mu_{s-1}^*(f, h')\, dh'$$

cu

$$\Phi(h) = \int_0^h \varphi(h')\, dh', \quad \varphi(h) > 0,$$

iar

$$\mu_0^*(f, h) = \mu_0(f, h).$$

2. Cazul neanalitic

1. Să considerăm acum o funcție $f(x_1, x_2, \dots, x_p, y)$ definită în steaua $S \subset T = C^p \times [0, \eta_1]$ cu derivatele continue pînă la ordinele ce intervin în ecuația

$$\left[\left(\frac{a_1}{2m_1}\right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_p}} + \dots + \left(\frac{a_p}{2m_p}\right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p}}{\partial x_p^{2m_p}} + b\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f = 0 \qquad (17)$$

Dacă aplicăm formula lui Taylor în raport cu x_1, ceilalți parametri fiind considerați ficși obținem

$$f\left(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp\frac{2\pi i r_1}{2m_1}, \dots, x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp\frac{2\pi i r_p}{2m_p}, y + bh^2\right) =$$

$$= f(x_1, x_2^*, \dots, x_p^*, y + bh^2) + \sum_{k=1}^{2m_1 n} \left(a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp\frac{2\pi r_1}{2m_1}\right)^k \times$$

$$\times \frac{\partial^k f(x_1, x_2^*, \dots, x_p^*, y + bh^2)}{\partial x_1^k} + \frac{h^{2n}}{n!} R_n \qquad (18)$$

unde am pus

$$x_2^* = x_2 + a_2 h^{\frac{1}{m_2}} u_2 \exp \frac{2\pi i r_2}{2m_2}, \ldots, x_p^* = x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp \frac{2\pi i r_p}{2m_p},$$

Se ştie că avem

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n}{n!} = 0 \tag{19}$$

Dacă în (18) aplicăm în continuare formula lui Taylor relativ la $x_2, \ldots$ $\ldots, x_p, y$ şi ne oprim la termenii $2m_2 n, \ldots, 2m_p n, n$, respectiv, toate resturile au proprietatea (19) încît dacă lui (18) astfel desfăşurat îi aplicăm operatorul

$$\frac{1}{B} Y \left[\frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \cdots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p-1} \right]$$

termenul referitor la aceste resturi se scrie $\frac{h^{2n}}{n!} R_n^*$, şi avem

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n^*}{n!} = 0,$$

operaţiile definite de operatorul Y neputînd să modifice această proprietate.

2. Aplicarea operatorului Y cere (M. Roşculeţ şi M. Craiu, [2] pag. 203) ca funcţia f şi derivatele sale în raport cu x_k să admită majorantă de forma

$$|D^{\alpha}_{x_k} f(x_1, \ldots, x_p, y)| < M_k \exp(K_k x^{\frac{2m_k}{2m_k - 1}})$$

$$\alpha = 0,1, \ldots, 2m_k \quad \text{şi} \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Putem enunţa următoarea

Teorema 6. Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$ definită în steaua $S \subset T = C^p \times$ $\times [0, \eta_1]$ cu derivate parţiale continue pînă la ordinul cerut de ecuaţia

$$E^{(n)} f = \left[\left(\frac{a_1}{2m_1} \right)^{2m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} + \ldots + \left(\frac{a_p}{2m_p} \right)^{2m_p} \frac{\partial^{2m_p}}{\partial x^{2m_p}} + b \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f = 0; \tag{19}$$

funcţia f şi derivatele sale admit majorantă pe S, pe

$$|D^{\alpha} f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \eta)| < M \exp(K x^m) \tag{20}$$

unde

$$M = \sup M_k, \quad K = \sup K_k, \quad m = \sup \frac{2m_k}{2m_k - 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

În aceste condiţii funcţionează formula

$$\frac{1}{B} Y\left[\frac{1}{2m_1} \sum_{r_1=0}^{2m_1-1} \ldots \frac{1}{2m_p} \sum_{r_p=0}^{2m_p-1} f\left(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m_1}} u_1 \exp \frac{2\pi i r_1}{2m_1}, \ldots \right.\right. \tag{21}$$

$$\left.\left. \ldots, x_p + a_p h^{\frac{1}{m_p}} u_p \exp \frac{2\pi i r_p}{2m_p}, \; y + bh^2\right)\right] =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_p, y) + \sum_1^n \frac{h^{2k}}{k!} E^{(k)} f(x, y) + \frac{h^{2n}}{n!} \varepsilon_n(h), \tag{21}$$

cu $\varepsilon_n(h) \to 0$ cînd $h \to 0$.
Cu notaţia

$$\mu_0(f, h) = f(x, y) + \sum_1^n \frac{h^{2k}}{k!} E^{(k)} f(x, y) + \frac{h^{2n}}{n!} \varepsilon_{0n}(h)$$

şi cu introducerea mediilor iterate

$$\mu_s(f; h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h h' \mu_{s-1}(f, h') \, dh', \tag{22}$$

care admit desfăşurările

$$\mu(f; h) = f(x, \eta) + \sum_1^n \left(\frac{1}{k+1}\right)^s \frac{h^{2k}}{k!} E^{(k)} f(x_1 y) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^s \frac{h^{2n}}{n!} \varepsilon_{s,n}(h) \tag{22'}$$

$s = 1, 2, \ldots, n$, avem următoarele

Teorema 7. În condiţiile teoremei 6, funcţia $f(x, x_2, \ldots, x_p, y)$ verifică în steaua S relaţia integrală

$$A \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_0(f; h) & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1(f; h) & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu(f; h) & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \ldots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \end{vmatrix} = \frac{h^n}{n!} \begin{vmatrix} \varepsilon_{0n}(h) & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{n+1} \varepsilon_{1n}(h) & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \varepsilon_{n,n}(h) & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \ldots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \end{vmatrix} \tag{23}$$

unde A este determinantul

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{2^n} & \dots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \end{vmatrix}.$$

Dacă toţi ε_{kn} sînt nuli deci f este în S o soluţie neanalitică a ecuaţiei (17) obţinem formula de medie (16) scrisă în cazul analitic.

Dacă dăm lui p şi m valori particulare regăsim rezultate obţinute de Miron Nicolescu [1] şi Marcel N. Roşculeţ [3].

BIBLIOGRAFIE

1. *Nicolescu M.* Studii şi Cerc. Mat. V, 3–4, 1954, pag. 243–332.
2. *Roşculeţ M., Craiu Mariana,* Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic., Ed. Academiei Republicii Socialiste Romania, 1979.
3. *Roşculeţ M.* Stud. şi Cerc. Mat. XIV, 1, 1963, pag. 23–48.

Opérateurs intégraux qui généralisent les équations différentielles. VIII. Formules de moyenne pour une classe d'équations aux dérivées partielles du type parabolique.

On établit des formules de moyenne pour les solutions analytiques dans une couche complexe $C^{(p)} \times [0, n]$ de l'équation

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{a_i}{2m_i}\right)^{2m_i} \frac{\partial^{2m_i} u}{\partial x_i^{2m_i}} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et de ses itérées. On étudie également et le cas non analytique.

C. Z.: 537.527: 538.52

DETERMINAREA TIMPULUI DE VIAȚĂ AL NIVELULUI $3s_2$ AL NEONULUI DIN ROTAȚIA FARADAY LA REZONANȚĂ

GABRIELA F. CONE, I. M. POPESCU, GH. A. STANCIU, C. M. STOICHIȚA*

În lucrare se prezintă rezultatele experimentale referitoare la dependența unghiului de rotație Faraday la rezonanță de inducția cîmpului magnetic aplicat și de curentul de descărcare pentru mediul optic activ neon și amestec heliu-neon. Se ia ca parametru presiunea gazului. Sursa de lumină utilizată este un laser cu He—Ne (λ 632,8 nm). Din aceste rezultate experimentale se determină timpul de viață mediu radiativ al nivelului $3s_2$ al neonului.

Teorie

Dacă se aplică un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}$ paralel cu direcția de propagare a radiației electromagnetice componentele σ ale despicării Zeeman în cîmp magnetic sînt împrăștiate coerent, în timp ce componentele π sînt împrăștiate necoerent. Rezultatul împrăștierii coerente este o rotație a planului de polarizare a radiației incidente, care reprezintă esența efectului Faraday.

Împrăștierea datorită atomului, care părăsește un subnivel m al stării inferioare a tranziției, trecînd pe un subnivel magnetic μ al stării superioare și apoi întorcîndu-se pe același subnivel m al stării inferioare, este coerentă.

Dacă se alege direcția Ox paralelă cu direcția de polarizare a undei incidente și direcția ξ paralelă cu direcția de transmisie maximă a aparatului analizor, se notează cu φ starea superioară a tranziției și cu f starea inferioară și se aplică un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}$ paralel cu axa Oz, notîndu-se cu θ unghiul format de direcțiile ξ și $\bar{B}$, intensitatea undei împrăștiate coerent, polarizată după direcția ξ, este dată de:

$$I_\xi = \sum \{\alpha(\varphi) + \beta(\varphi) \left[\frac{e^{-2i\theta}}{1 - i\tau g_\varphi \frac{eB}{2m_e}} + \frac{e^{2i\theta}}{1 + i\tau g_\varphi \frac{eB}{2m_e}} \right] \}, \qquad (1)$$

* Șef lucrări dr. ing.; Prof. dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Șef lucrări dr. ing., catedra Fizică; Ing., IMSAT București.

unde τ este timpul de viaţă radiativ al nivelului superior, m_e este masa electronului,

$$\alpha(\varphi) = \frac{C}{4g_f} \sum_{\mu\varphi} \sum_{f} (A\sigma)^{\varphi f}_{\mu f}|^2,$$

cu $(A_\sigma)\,\varphi^{\varphi f}_{\mu f}$ probabilitatea de tranziţie de pe subnivelul magnetic μ al lui φ pe f, datorită tuturor componentelor Zeeman posibile şi

$$(A\sigma)^{\varphi f}_{\mu} = 2\,[\,|(e\dot{x})^{\varphi f}_{\mu,\mu+1}|^2 + |(e\dot{x})^{\varphi f}_{\mu,\mu+1}|^2],$$

iar,

$$\beta(\varphi) = \frac{C}{4g_f} \Big| \sum_{f} (e\dot{x})^{\varphi f}_{\mu+2,\mu+1} (e\dot{x})^{f\varphi}_{\mu+1,\mu}\Big|^2.$$

Din expresia (1) a intensităţii I_ξ se obţine că direcţia de polarizare pentru care intensitatea este maximă este dată de

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sum_{\varphi} P_0(\varphi) \sin 2\theta(\varphi) \cos 2\theta(\varphi)}{\sum_{\varphi} P_0(\varphi) \cos^2 2\theta(\varphi)} \tag{2}$$

unde $\operatorname{tg} 2\theta(\varphi) = \dfrac{\tau g_\varphi eB}{2m_e}$ şi $P_0(\varphi) = \dfrac{2\,\beta(\varphi)}{\sum_{\varphi} \alpha(\varphi)}$ este gradul de polarizare pentru componenta σ.

În cazul tranziţiei $3s_2 - 2p_4$ a neonului, factorii lui Landé au valori calculate apropiate [1] pentru cele două stări : $g = 1{,}295$ pentru starea $3s_2$ şi $g_f = 1{,}301$ pentru starea $2p_4$, astfel că în expresia despicării Zeeman, $\Delta\nu = (g_\varphi \mu - g_f m)\dfrac{eB}{4\pi m_e}$ am considerat că $g_\varphi \simeq g_f$ şi am ţinut cont de regulile de tranziţie pentru componentele σ : $\mu = m \pm 1$, obţinînd, $\Delta\nu \cong \dfrac{g_\varphi eB}{2m_e}$.

La rezonanţă şi în cazul în care unda incidentă este o undă laser intensităţile radiaţiilor corespunzătoare celorlalte tranziţii în afara tranziţiei laser sînt neglijabile faţă de intensitatea tranziţiei laser astfel că putem considera că $\varphi = 1$ şi din (2),

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\tau g_\varphi eB}{2m_e}. \tag{3}$$

Rezultate experimentale

În cazul experienţelor efectuate de noi, pentru cîmpuri de inducţie magnetică $B \leqslant 500$ Gs, interacţia dintre momentele magnetice orbital şi de spin este mai mare decît interacţia dintre fiecare din aceste momente

magnetice și cîmpul exterior deoarece $\mu_B B \ll E_\varphi - E_f$, unde $\mu_B B \simeq$ $\simeq 4{,}635 \cdot 10^{-25}$ J și $E_\varphi - E_f = 3{,}1 \cdot 10^{-19}$ J ($\mu_B = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ J/T este magnetonul lui Bohr, iar E_φ și E_f sînt energiile stărilor $3s_2$ și $2p_4$ ale neonului).

Măsurarea unghiului de rotație a planului de polarizare a radiației laser s-a făcut cu o metodă de modulare a fasciculului laser cu ajutorul unui polarizor rotitor. Sursa de lumină folosită a fost un laser cu He—Ne cu λ 632,8 nm, iar mediul optic activ a fost neonul și amestecul heliu-neon. Cîmpul magnetic exterior a fost realizat cu un solenoid alimentat la o baterie de acumulatori. Detaliile asupra dispozitivului experimenal sînt date în [2].

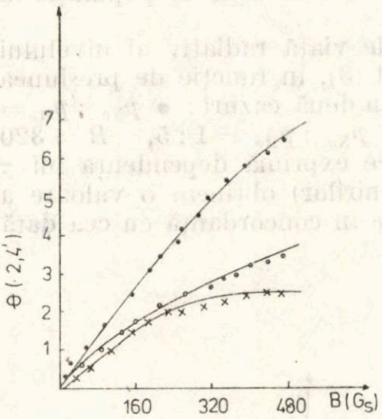


Fig. 1 — Dependența unghiului θ de inducția cîmpului magnetic pentru Ne la presiunea de 4 torr pentru valori diferite ale curentului de descărcare : ● — 44 mA ; ○ 29 mA ; x — 24 mA.

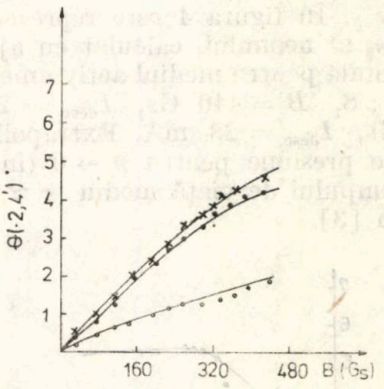


Fig. 2 — Dependența unghiului θ de inducția cîmpului magnetic pentru amestecul He—Ne în proporție $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 5$, pentru valori diferite ale presiunii totale și curentului de descărcare : ○ — $p_{total} = 2{,}4$ torr ; $I_{desc} =$ = 28 mA ; x — $p_{total} = 1$ torr ; $I_{desc} =$ = 26 mA ; ● — $p_{total} = 1$ torr ; $I_{desc} =$ = 30 mA

În figura 1 este reprezentată dependența unghiului de rotație θ a planului de polarizare de inducția cîmpului magnetic pentru mediul optic activ neonul la presiunea de 4 torr, pentru trei valori ale curentului de descărcare : ● — 44 mA ; ○ — 20 mA și x — 24 mA iar în figura 2 aceeași dependență pentru amestecul heliu-neon în proporția 5 : 1 în cazurile : ○ — $p_{total} = 2{,}4$ torr, $I_{desc} = 28$ mA ; x — $p_{total} = 1$ torr, $I_{desc} = 26$ mA și ● — $p_{total} = 1$ torr, $I_{desc} = 30$ mA. Se observă că în cazul mediului optic activ format doar din neon unghiul de rotație a planului de polarizare pentru aceeași presiune a gazului și aceeași inducție a cîmpului magnetic crește cu creșterea curentului de descărcare, în timp ce pentru amestecul heliu-neon unghiul θ scade cu creșterea curentului de descărcare. Rezultatul se datorește faptului că în cazul neonului pur probabilitatea de excitare a atomilor de Ne pe starea $3s_2$ crește odată cu curentul de descărcare, procesul datorîndu-se ciocnirilor, iar în cazul amestecului He—Ne, pentru valorile folosite ale parametrilor, probabilitatea de

excitare pe nivelul $3s_2$ al neonului scade cu creșterea curentului de descărcare datorită creșterii numărului de ciocniri ale atomilor de Ne. Se știe că nivelul $3s_2$ al neonului este populat prin transfer rezonant de pe nivelul metastabil 2 S al heliului. În acest caz ciocnirea atomilor de neon cu alți atomi decît metastabilii de He de pe nivelul 2 S duce la scăderea probabilității de excitare a stării $3s_2$ a Ne.

În figura 3 este reprezentată dependența unghiului de rotație θ a planului de polarizare de curentul de descărcare în două cazuri: ○ mediul activ neon la presiunea de 0,8 torr și inducția magnetică $B = 450$ Gs și ● mediul activ amestec He—Ne în proporția 5 : 1, presiunea totală 5 torr și $B = 400$ Gs. Se observă că sensul de rotație a planului de polarizare diferă în cele două cazuri, ceea ce indică o inversie de populație în amestecul He—Ne.

În figura 4 este reprezentat timpul de viață radiativ al nivelului $3s_2$ al neonului, calculat cu ajutorul relației (3), în funcție de presiunea totală pentru mediul activ amestec He—Ne în două cazuri: ● $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 8$, $B = 440$ Gs, $I_{desc} = 28$ mA și ○ $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 5$, $B = 320$ Gs, $I_{desc} = 28$ mA. Extrapolînd dreapta ce exprimă dependența lui τ de presiune pentru $p \to 0$ (în absența ciocnirilor) obținem o valoare a timpului de viață mediu $\tau \simeq 10$ ns, valoare în concordanță cu cea dată în [3].

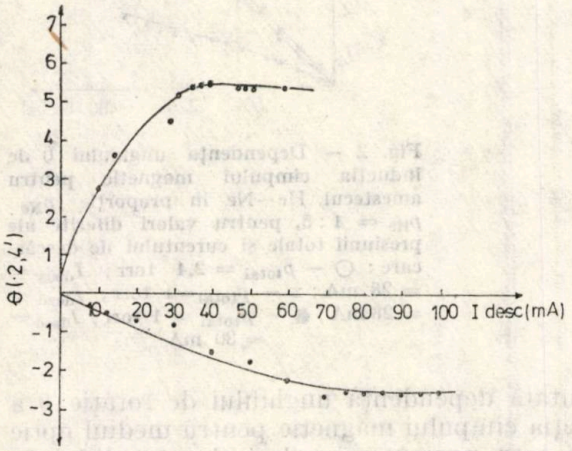


Fig. 3 — Dependența unghiului θ, de curentul de descărcare în cazul mediului activ neonul și amestecul heliu-neon: ○ $p_{Ne} = 0{,}8$ torr, $B = 450$ Gs; ● $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 5$; $p_{total} = 5$ torr, $B = 400$ Gs.

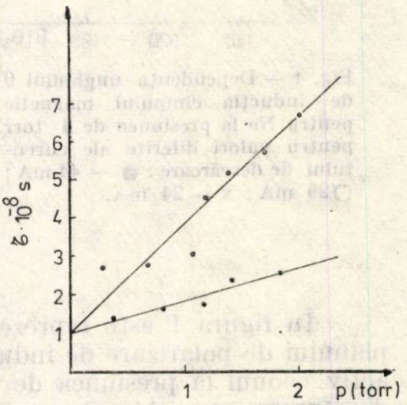


Fig. 4 — Dependența timpului $3s_2$ al neonului de presiunea totală a gazului în cazul amestecului heliu-neon: ○ $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 8$; $B = 440$ Gs; $I_{desc} = 28$ mA; ● $p_{Ne} : p_{He} = 1 : 5$; $B = 320$ Gs; $I_{desc} = 2\nu$ mA.

Concluzii

Măsurătorile făcute asupra dependenței unghiului de rotație Faraday de diverși parametri confirmă mecanismele de excitație propuse în literatură pentru nivelul $3s_2$ al neonului în amestec He-Ne (figura 1 și 2),

permit punerea în evidență a apariției inversiei de populație (figura 3) și conduc la o valoare calculată a timpului de viață mediu pentru nivelul $3s_2$ al neonului de 10 ns în concordanță cu valoarea acceptată în literatură (fig. 4).

BIBLIOGRAFIE

1. *L. Allen, D. G. C., Jones, Helen Simantiris,* Proc. Phys. Soc. *91,* 774 (1967).
2. *Gh. Stanciu, Gabriela Cone, I. M. Popescu, C. Stoichița,* Bul. I.P.B. Seria E, Tom XLIV, nr. 2, pg. 17 (1982).
3. Lasers and their Applications, Ed. A. Sona, Gordon and Breach, p. 232 (1976).

La détermination du temps de vie du niveau $3s_2$ de Ne en utilisant la rotation Faraday à la résonance

Dans ce travail on présente les résultats expérimentales concernant la dépendance d'angle de rotation Faraday au résonance de l'induction B du champ magnétique extérieur et de l'intensité du courant électrique de la décharge pour les gas Ne et le mélange He—Ne comme millieu optique actif. On prend comme paramètre la pression du gas. Un laser He—Ne à $\lambda = 632{,}8$ nm est utilisé pour source de lumière. De ces résultats on détermine le temps de vie radiatif du niveau $3s_2$ de Ne.

C. Z.: 593.15
537.12

SECȚIUNEA DE INTERACȚIE FOTON-ELECTRON EXPRIMATĂ PRIN ELEMENTE ALE MATRICII DE ÎMPRĂȘTIERE

T. CREȚU, G. MACARIE, P. ȘTIUCĂ *

Se studiază interacția foton-electron luînd în considerație stările de polarizare atît ale fotonului cît și ale electronului. În urma calculelor efectuate se ajunge la o expresie generală a secțiunii de interacție foton-electron în funcție de elementele matricii S de împrăștiere de ordinul doi.

Introducere

Studiul și determinările polarizației radiației gama [1] continuă să rămînă esențiale printre mijloacele de testare ale teoriei interacției slabe dacă emisia cuantei gama de către nuclee nepolarizate este urmată de o dezintegrare beta. De asemenea, cercetarea efectelor dependente de spin în împrăștierea Compton prezintă un interes metodologic în legătură cu determinările polarizației în experimente legate de urmărirea neconservării parității în forțele nucleare [2]. Descoperirea experimentală a efectului de rotație a planului de polarizație liniară a radiației gama [3] la interacția acesteia cu electroni orientați a determinat o creștere a interesului științific pentru explicarea mecanismului de apariție a unei asimetrii în împrăștierea radiației gama pe astfel de particule. În acest scop ne-am propus să studiem procesele de împrăștiere mai sus amintite exprimînd secțiunea diferențială de interacție foton-electron în termeni de elemente ale matricii de împrăștiere cu luarea în considerație a stării de polarizare a particulelor care rezultă din interacție.

1. Prezentarea generală a problemei

În multe cazuri interesează determinarea stării de polarizare a particulelor care rezultă din interacție (orientarea spinilor electronilor sau direcțiile polarizării fotonilor). În acest caz probabilitatea dP_{if} de interacție trebuie să fie sumată peste toate stările posibile ale polarizării particulelor din starea finală. În afară de aceasta, dacă în starea inițială particulele nu sînt polarizate, atunci probabilitatea dP_{if} trebuie mediată și peste polarizările particulelor din starea inițială.

* Prof. dr. ing.; Șef lucrări ing.; Asist. ing., Catedra Fizică

Se consideră cazul cînd în stările inițială și finală participă un electron. [4—5]. Amplitudinea împrăștierii are forma

$$M_{if} = \bar{u}_f O u_i \tag{1}$$

cu $u_i = u(p_i)$ și $u_f = u(p_f)$ amplitudinile spinoriale ale electronului în starea inițială și starea finală; O — matricea care conține interacția de împrăștiere. Interesează mărimea $\frac{1}{2}\sum_{\mu_i,\mu_f} |M_{if}|^2$ cu μ_i, μ_f proiecțiile spinului electronului în stările inițială și finală. Ea se găsește a fi

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu_i,\mu_f} |\bar{u}_f O u_i|^2 = \frac{1}{2} Tr\{O(m - i\hat{p}_i) O(m - i\hat{p}_f)\} \tag{2}$$

cu $O = \gamma_4 O^+ \gamma_4$.
Analog se procedează dacă în stările inițială și finală acționează pozitroni.

$$M_{if} = \bar{v}_i O V_f \tag{3}$$

cu $v_i = u(-p_i)$ și $v_f = u(-p_f)$ amplitudinile spinoriale ale pozitronului în stările inițială și finală; p_i și p_f sînt impulsurile acestor stări. În acest caz

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu_i,\mu_f} |\bar{v}_i O v_f|^2 = \frac{1}{2} Tr\{O(m + i\hat{p}_f) \bar{O}(m + i\hat{p}_i)\} \tag{4}$$

În situația în care la proces participă mai mulți electroni sau pozitroni sumarea peste polarizările particulelor se face complet analog, dar matricea O va conține și ea amplitudini spinoriale.

Sumarea și medierea după polarizarea fotonului se efectuează cu totul diferit. Fie un foton în starea finală cu cîmpul $\vec{k}$ și polarizarea λ ($\lambda = 1,2$). Elementul matricii de împrăștiere pentru trecerea de la starea inițială la starea finală se poate scrie

$$(\Phi_f, S\,\Phi_i) = (C_k^+\,\Phi_f', S\,\Phi_i) \tag{5}$$

unde Φ_i, Φ_f sînt vectorii stărilor inițială și finală, iar Φ_f' vectorul de stare care nu conține fotoni cu impulsul $\vec{k}$ și polarizarea λ. Dat fiind că stările Φ_i, Φ_f se consideră stări fizice rezultă

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1,2} |(\Phi_f, S\,\Phi_i)|^2 &= \sum_{\lambda=1,2} C_{k\lambda}^+\,\Phi_f', S\,\Phi_i|^2 = \\ &= \sum_{\lambda=1,2,3} |C_{k\lambda}^+\,\Phi_f', S\,\Phi_i|^2 - |C_{k4}^+\,\Phi_f', S\,\Phi_i|^2\end{aligned} \tag{6}$$

cu $C_{k\lambda}$ — operatorul de anihilare a fotonului $(\vec{k}, \lambda)$, iar $C^{+}_{k\lambda}$ — operatorul de creare a fotonului. Ei satisfac relaţia :

$$[C_{k\lambda}, C^{+}_{k\lambda}] = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, 2, 3 \\ -1, & \lambda = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Dacă în stările iniţială şi finală se află un electron, atunci mărimea M_{if} corespunzătoare elementului matricii de împrăştiere $(\Phi_f, S\Phi_i)$ trebuie să se aleagă sub forma

$$M_{if} = \bar{u}_f O \hat{e}^{(\lambda)} O' u_i \tag{8}$$

unde u_i şi u_f sînt amplitudinile spinoriale ale electronului în stările iniţială şi finală iar matricile O şi O' conţin interacţia de împrăştiere ; $e^{(\lambda)}_{\mu}$ reprezintă versorul polarizării fotonului $\hat{e}^{(\lambda)} = e^{(\lambda)}_{\mu} \gamma_{\mu}$. Urmează că

$$\sum_{\lambda=1.2} |M_{if}|^2 = \sum_{\lambda=1,2,3} |\bar{u}_f O \hat{e}^{(\lambda)} O' u_i|^2 - |\bar{u}_f O \hat{e}^{(4)} O' u_i|^2 \tag{9}$$

Dat fiind că $M^{*}_{if} = \bar{u}_i O' \hat{e}^{(\lambda)} \gamma_4 \bar{O} u_f$, cu $\bar{O} = \gamma_4 O \gamma_4$, se obţine

$$\sum_{\lambda=1,2} |M_{if}|^2 = -(\bar{u}_f O \gamma_{\mu} O' u_i)(\bar{u}_i O' \gamma_{\mu} \bar{O} u_f) \tag{10}$$

pentru că $\sum_{\lambda=1}^{4} e^{(\lambda)}_{\mu} e^{(\lambda)}_{\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

Procesul de împrăştiere este caracterizat fizic prin probabilitatea sa. Această mărime este direct măsurabilă doar în cazul în care starea iniţială este uniparticulă. Dacă în interacţie intervin mai multe particule, mărimea fizică în discuţie va fi invers proporţională cu volumul de normare care se alege arbitrar. Pentru a obţine mărimea care caracterizează procesul de împrăştiere nedepinzînd de volumul de normare se împarte probabilitatea diferenţială de împrăştiere dP_{if} la densitatea curentului de particule j care interacţionează. Se obţine secţiunea efectivă diferenţială de împrăştiere

$$d\sigma = \frac{dP_{if}}{j} \tag{11}$$

Cum numărul de procese de împrăştiere din volumul de normare este un invariant, iar secţiunea efectivă diferenţială de împrăştiere constituie un invariant relativist se obţine pe baza relaţiilor (9 — 11) expresia

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M_{if}|^2 \delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \tag{12}$$

Indicii 1 și 2 se referă la particulele din starea inițială, iar indicele f reprezintă particulele din starea finală; ε_1, ε_2 reprezintă energiile particulelor care interacționează, iar p_1 și p_2 descriu 4-vectori impuls ai particulelor inițiale de mase m_1 și m_2.

Uneori este comod ca expresia $\mathrm{d}\sigma$ să conțină doar mărimi invariante În acest scop se scot din expresia (8) a lui M_{if} acei factori care nu sînt invarianți: ei provin de la elementele de matrice ai operatorilor cîmp și se pot pune sub forma $\frac{1}{\sqrt{2\ \varepsilon_k}}$ [6]; în felul acesta se obține o relație de forma

$$M_{if} = A_{if} \prod \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} \tag{13}$$

unde produsul se efectuează peste toate particulele din stările inițiale și finale; A_{if} este un invariant relativist. Cunoscînd că integrările se efectuează după relația [6]

$$\int \frac{d^3 p_f}{\varepsilon_f} = 2 \int d^4 p_f \delta(p_f^2 + m_f^2)\, \theta\ (\varepsilon_f) \tag{14}$$

cu $$\theta(\varepsilon_f) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_f > 0 \\ 0, & \varepsilon_f < 0 \end{cases}$$

se obține în final

$$\mathrm{d}\sigma = (2\pi)^4 |A_{if}|^2 \cdot \frac{\delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f)}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_f \left(\frac{d^4 p_f\, \delta(p_f^2 + m_f^2)}{(2\pi)^3}\ \theta\ (\varepsilon_f) \right) \tag{15}$$

2. Împrăștierea fotonului de către electron

După cum se știe pentru electroni liberi nu sînt posibile procese de ordinul întîi. Din această cauză cele mai simple procese de interacție a fotonilor cu electroni liberi trebuie să fie descrise cu ajutorul matricii de împrăștiere de ordinul doi care se va lua în cazul cel mai general sub forma

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int T \{ N[\overline{\Psi}(x_1) A(x_1) \Psi(x_1)]\, N[\overline{\Psi}(x_2) A(x_2) \Psi(x_2)] \}\, \mathrm{d}x_1^4\, \mathrm{d}x_2^4 \tag{16}$$

unde T indică produsul cronologic al operatorilor cîmpului electronic. Fie $\varphi_1(x_1)$ și $\varphi_2(x_2)$ două componente ale operatorilor de cîmp Ψ și $\overline{\Psi}$; atunci

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)) = \begin{cases} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) & \text{dacă } t_1 < t_2 \\ -\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1) & \text{dacă } t_2 < t_1 \end{cases}$$

Spre deosebire de produsul cronologic al operatorilor de cîmp EM, produsul cronologic al cîmpului electronic schimbă de semn la permutarea operatorilor φ_1 şi φ_2.

În relaţia (16) N marchează produsul normal al operatorilor cîmpului electronic : dacă operatorii $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ conţin doar operatorii de creare şi anihilare,

$$N(\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n) = \delta_p \chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_n}$$

cu $\delta_p = \pm 1$ după cum permutarea $(1, 2, \ldots n) \to (i_1, i_2, \ldots i_n)$ este pară sau impară.

Scrierea secţiunii diferenţiale de interacţie în termeni ai matricii de împrăştiere $S^{(2)}$ va prezenta avantajul luării în considerare a proceselor cu două stări fotonice deoarece $S^{(2)}$ conţine operatorul potenţial $A_\mu(x)$ sub o formă biliniară. De asemenea, matricea de împrăştiere de ordinul doi $S^{(2)}$ permite totodată şi marcarea operatorilor de polarizare.

În general se obţine

$$S^{(2)} = e^2 N \int \overline{\Psi}(x_2) \hat{A}(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}(x_1) \Psi(x_1) \, dx_1^4 \, dx_2^4 \tag{17}$$

unde S_c se determină cu ajutorul relaţiei

$$S_c = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C S_c(p) e^{ipx} d^4 p, \text{ cu } S_c(p) = i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \tag{18}$$

Conturul de integrare se poate înlocui cu axa reală dacă se face schimbarea $m \to m - i0$; în această situaţie $S_c(x)$ reprezintă funcţia Green a ecuaţiei Dirac pentru electronul liber [6]

$$(i\hat{p} + m) S_c(x) = - i \delta(x) \tag{19}$$

În relaţia (17) $\Psi_1(x)$ şi $\Psi(x_2)$ reprezintă FU ale stărilor electronice iniţială şi finală, iar $\hat{A}(x_1)$ şi $\hat{A}(x_2)$ semnifică potenţialele stărilor fotonice iniţiale şi finale. În expresia (17) se înlocuiesc operatorii $\overline{\Psi}(x_2)$ şi $\Psi(x_1)$ cu funcţiile corespunzătoare $\overline{\Psi}(x_2)$ şi $\Psi(x_1)$, iar operatorul $\hat{A}(x_2)$ şi $\hat{A}(x_1)$ cu funcţiile $A_2^*(x_2) A_1(x_1) + A_1(x_2) A_2^*(x_1)$ şi se obţine

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = e^2 \int \overline{\Psi}_2(x_2) \{ & A_2^*(x_2) S_c(x_2 - x_1) A_1(x_1) + \\ & + A_1(x_2) S_c(x_2 - x_1) A_2^*(x_1) \} \cdot \Psi_1(x_1) \, dx_1^4 \, dx_2^4 \end{aligned} \tag{20}$$

Funcţiile $\Psi(x)$ şi $A_\mu(x)$ se vor lua sub formă de unde plane normate la unitatea de volum

$$\Psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_a e^{ipx}, \; A_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_b e^{ikx} \quad (a, b = 1, 2) \tag{21}$$

cu p, k — 4 — impulsurile electronului și fotonului
ε, ω — energiile electronului și fotonului
$u(p)$, e_μ — amplitudini bispinoriale și 4-vectoriale pentru care condițiile de normare sînt $\bar{u}u = 2m$, $e^*e = 1$.

Făcînd aceste înlocuiri și luînd în considerație expresia $S_c(x)$ din relațiile (18, 19) se obține în final

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{i e^2}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \bar{u}_2 \cdot \left\{ \hat{e}_2^* \frac{i\hat{f}_1 - m}{f_1^2 + m^2} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i\hat{f}_2 - m}{f_2^2 + m^2} \hat{e}_2^* \right\} u_1 \tag{22}$$

cu $f_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$, $f_2 = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$

Experimental interesează dependența frecvenței fotonului împrăștiat ω_2 în raport de direcția impulsului său. Mărimile f_1 și f_2 reprezintă 4-impulsurile electronilor virtuali (pentru care nu se realizează relația energie-impuls). Diferența între stările electronului virtual și cele ale electronului real este dată de mărimea

$$\varkappa_i = \frac{f_i + m^2}{m^2} \qquad (i = 1, 2) \tag{23}$$

care se anulează pentru starea reală.

Considerînd matricea de împrăștiere în cazul interacției foton-electron relația (15) devine

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} |\bar{u}_2 O u_1|^2 \frac{d^3 p_2 \, d^3 k_2}{16 J \varepsilon_2 \omega_2} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \tag{24}$$

unde operatorul O se identifică astfel

$$O = \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}_2^* (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_1 + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_2^* \tag{25}$$

iar $J = |p_1 k_1| = \frac{1}{2} m_2 |\varkappa_1|$.

Existența în expresia (24) a lui $\mathrm{d}\sigma$ a funcției δ permite integrarea peste d^3p_2 și d^3k_2 deoarece $\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) d^3p_2 \to 1$, iar $\mathrm{d}(\varepsilon_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2) d^3 k_2 \to \omega_2^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) \right|^{-1} \mathrm{d}\Omega_2$, unde $\mathrm{d}\Omega_2$ este elementul de unghi solid în care se află vectorul $\vec{k}_2$. În această ultimă relație ε_2 este funcție

de ω_2 pentru că impulsul p_2 este legat de k_2 prin relaţia $\varepsilon_2^2 = m_2^2 + (\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2$ Observînd că $\frac{\partial}{\partial \omega_1}(\omega_2 + k_2) = -\frac{m^2 \varkappa_1}{2 \varepsilon_2 \omega_2}$, relaţia (24) devine

$$d\sigma = \gamma_0^2 \frac{\omega_2^2 \, d\Omega_2}{m^2 \varkappa_1^2} |\bar{u}_2 O u_1|^2 \tag{26}$$

cu $\gamma_0 = \frac{e^2}{4 \pi m}$.

Dacă starea iniţială a electronului nu este polarizată şi nu interesează polarizarea electronului în starea finală se sumează în expresia (26) peste toate valorile proiecţiilor spinului electronului din starea finală şi se mediază peste valorile proiecţiilor spinului electronului din starea iniţială. O astfel de mediere conduce la expresia secţiunii diferenţiale de interacţie de forma

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2 \varkappa_1^2} Tr \{O (i\hat{p}_1 - m) \bar{O} (i\hat{p}_2 - m)\} \, d\Omega_2 \tag{27}$$

cu $\bar{O} = \gamma_4 O + \gamma_4$.

În relaţia (27) se introduce expresia

$$O (i\hat{p}_1 - m) \bar{O} (i\hat{p}_2 - m) = \left\{ \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}_2 (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_2 \right\} (i\hat{p}_1 - m) \, x$$

$$\left\{ \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \hat{e}_1 (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_2 + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \hat{e}_2 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_1 \right\} (i\hat{p}_2 - m) \tag{28}$$

Dacă fotonul iniţial, de asemenea, nu este polarizat şi dacă nu interesează polarizarea fotonului final se sumează în expresia (28) peste stările finale de polarizare ale fotonului şi se mediază stările de polarizare iniţiale ale lui. Acest calcul modifică expresia (27) a mărimii $d\sigma$ la forma

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 \, d\Omega_2}{m^2 \varkappa_1^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot Tr \, F \tag{29}$$

cu

$$F = \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \left\{ \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right\} \cdot$$

$$\cdot (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m).$$

$$\gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \left\{ \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right\} x \tag{30}$$

$$x (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m)$$

Relațiile (27, 28) permit studiul fenomenelor de împrăștiere a fotonului pe electroni cu luarea în considerație în cadrul interacției dintre cele două particule a stărilor lor de polarizare. În felul acesta asimetriile observate experimental în împrăștierea radiației gama pe electroni orientați și care au fost interpretate ca datorate unor efecte de rotație a planului de polarizare liniară a radiației gama ar putea fi analizate și evaluate teoretic. Într-o lucrare viitoare ne vom ocupa de unele aplicații ale relațiilor obținute pentru procese concrete de interacție foton-electron.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. M. Lobashov, V. A. Nazarenko, L. F. Sayenko, L. M. Smotritsky, G. I. Kharkevich,* Phys. Lett., *25*, B104, 1967.
2. *V. M. Lobashov, E. A. Kolomenski, L. A. Popeko, A. P. Serebrov, L. M. Smotritsky, G. I. Kharkevich,* JETF *68*, 4, 1220, 1975.
3. *P. Bock,* Phys. Lett., *30*, B628, 1969.
4. *P. A. Apanasevitch,* Osnovî teorii vzaimodeistvia sveta s vetchestvom, Minsk, Izd. „Nauka i tehnika", 1977.
5. *A. I. Ahiezer, V. B. Berestețki,* Kvantovaia electrodinamika, Moskva, Izd. „Nauka", 1969.
6. *N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov,* Kvantovîe polia, Moskva, Izd. „Nauka", 1980.

Photon-Electron Interaction Section in Terms of S-Matrix Elements

The photon-electron interaction is studied taking into account the polarized states of both particles. A general expression for the differential interaction section photon-electron is obtained in terms of the S-matrix elements of the second order.

C. Z.: 532.783 : 538.3
778.347 : 539.12

POSIBILITATEA OBȚINERII UNOR IMAGINI ELECTRONOGRAFICE PE CRISTALE LICHIDE

MARIA HONCIUC, T. AVRAM *

În lucrare se prezintă un studiu asupra posibilității obținerii unor imagini electronografice pe cristale lichide smectice chirale.

Se discută posibilitatea obținerii de informații asupra distribuției sarcinii electrice în cristale lichide.

1. Introducere

Electronografia este o metodă de explorare electrografică** cu ajutorul fenomenului de electroluminiscență în care imaginea este controlată printr-un sistem complex ce urmărește emisia de electroni, propagarea cîmpului electromagnetic și conversia diferențiată a distribuției sale în energie luminoasă. Expunerea se face într-un cîmp electromagnetic tranzitor realizat de un impuls unic de tensiune. Primele imagini electronografice au fost realizate în anul 1975 (C. și N. Golovanov) în laboratorul de tehnica tensiunilor înalte din Institutul politehnic București.

2. Caracteristici generale

Electronografia reproduce caracteristicile electrice ale unui corp fizic investigat, cu ajutorul unei tehnici care se bazează pe trei principii fundamentale :

a) Cuantificarea emisiei de electroni prin aplicarea unei tensiuni electrice de valori ridicate sub forma unui impuls unic, cu parametri cunoscuți.

b) Controlul cîmpului electromagnetic realizat de impulsul de foarte înaltă tensiune în spațiul dintre electrozi, control obținut prin determinarea compoziției dielectrice și modificării în scopul urmărit, prin accelerarea sau frînarea electronilor prin diferite medii omogene sau prin interacțiuni cu alte cîmpuri (magnetice, electrice sau electromagnetice).

---

* Șef lucrări dr. ing., Catedra Fizică ; Student

** Prin electrografie se înțelege fotografierea prin intermediul curenților de înaltă frecvență. Această tehnică electrografică se deosebește de metodele electronografice prin parametrii curentului electric explorator și prin mecanismele care generează, în cursul explorării, imaginile obiectelor investigate.

c) Conversia diferențiată a energiei electronilor și a particulelor secundare determinate de ciocnirea acestora cu structurile impuse în dispozitivul de înregistrare, în energie luminoasă, cu ajutorul unor substanțe electronooptice.

Aparatul de electronografie poate fi considerat ca un accelerator liniar și unidirecțional de particule. Spațiul de accelerare este virtual și include senzorul de lumină (de obicei o peliculă fotosensibilă). În principiu, sistemul de investigat este plasat la masa sursei de foarte înaltă tensiune sau este introdus între electrozi și polarizat în cîmpul electromagnetic astfel realizat. Schema de principiu a dispozitivului de înregistrare este prezentată în fig. 1.

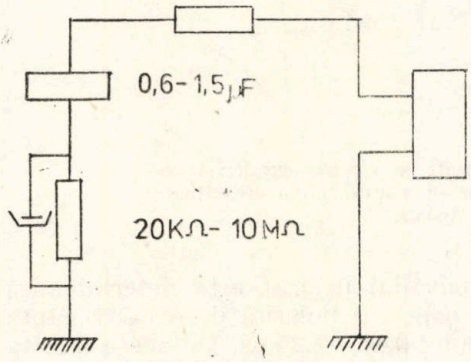


Fig. 1 — Schema circuitului echivalent tip condensator incomplet.

Proba de investigat este introdusă în cîmpul electromagnetic dintre cele două armături metalice ale condensatorului, fiind polarizată diferit față de fiecare dintre cele două armături, determinînd emisii electronice ce vor acționa diferit ca polaritate față de două pelicule fotografice plasate în spațiul dielectric care separă proba de fiecare dintre cei doi electrozi în parte.

Un astfel de dispozitiv se comportă ca un dublu dispozitiv electronografic, imaginea fiind complementară pentru cele două suprafețe de expunere.

3. Tehnica electronografică

Emisia de electroni este realizată printr-un impuls unic aplicat dispozitivului de înregistrare generat de o sursă de înaltă sau foarte înaltă tensiune cu valori de amplitudine între 1 KV și 90 KV. Parametrii care influențează imaginea electronografică sînt : panta de creștere, panta de coborîre, durata, polaritatea impulsului, fiind controlați prin dispozitive de comandă.

Imaginea este formată de o variație de tensiune unică, fapt ce impune utilizarea unei pante cu creșterea rapidă în măsură să determine fenomenul de electroluminiscență și a unei pante de descreștere lentă care să nu producă fenomenul de electroluminiscență.

Impulsurile utilizate în electronografie sînt de mai multe feluri (fig. 2) : impuls unipolar „funcţii-treaptă" (fig. 2 a), care generează imagini cu descărcări marginale ordonate ; impulsul triunghiular (fig. 2 b), care imprimă electronilor o accelerație destul de mare pe frontul crescător, pentru a realiza fenomenul de electroluminiscență cu o revenire lentă ce nu modifică efectul inițial ; impuls simetric bipolar, „impuls în foarfecă", este utilizat în studiul comportamentului probei sub aspectul polarității relative (fig. 2 c) etc.

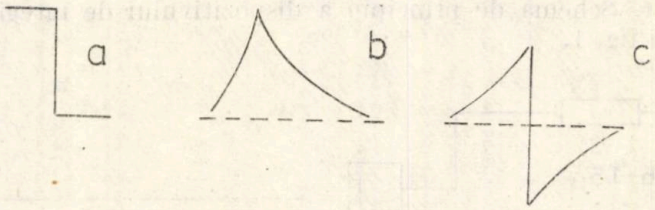


Fig. 2 — Tipuri de impulsuri utilizate în electronografie : a) impulstreaptă ; b) impuls triunghiular cu pantă activă crescătoare ; c) impuls bipolar.

Panta de variație bruscă a impulsului utilizat este determinantă pentru imaginea electronografică sub aspectul polarității. Această pantă poate avea o durată cuprinsă în intervalul 0,85—1,25 μs. De aceea durata impulsului este determinată de durata pantei de revenire lentă care necesită un timp mai mare de 50 μs, pentru a nu influența imaginea electronografică.

4. Cristalul lichid în electronografie

Studiul cristalelor lichide a pus în evidență posibilitatea utilizării acestora în diverse tehnologii [1, 2]. Pentru caracterizarea completă a cristalelor lichide o importanță deosebită o are cunoașterea anizotropiei electrice și dielectrice, precum și evidențierea unor defecte ce pot apare în structura acestora. Imaginea electronografică poate fi utilizată în studierea sarcinii de suprafață a acestora, a defectelor de structură, precum și a polarizabilității probelor studiate. Imaginea electronografică se compune din trei tipuri de efecte luminoase distincte : efectul pelicular, efectul electronograf și efecte luminoase secundare din mediul electric proximal.

Adaptarea unei scheme echivalente a instalației de investigare pune probleme deosebite în ceea ce privește modelarea cristalului lichid printr-un circuit care, deși de formă foarte simplă, întocmit în urma studiilor de diagramă Cole-Cole [4], să poată constitui un model pentru studiul pe calculatorul numeric al diferitelor variante de configurații electrod-izolant-cristal lichid. Schema echivalentă a instalației de experimentare este dată în fig. 3.

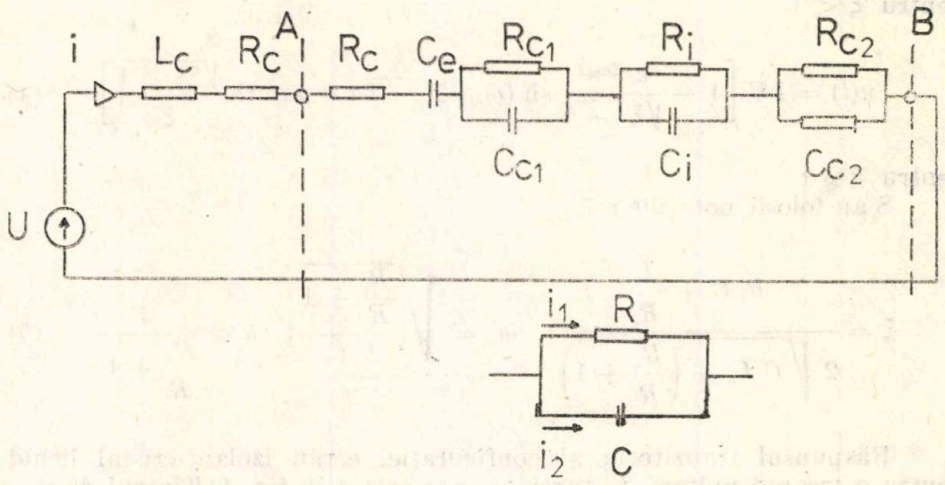


Fig. 3 — Schema echivalentă a instalației experimentale.

În schemă intervin : parametrii conexiunilor dintre generatorul de impuls de tensiune și electrozi (inductivitatea L_c și rezistența R_c), parametrii zonei protectoare aer și ecran izolant (rezistența R_e și capacitatea C_e), parametrii probei cu cristal lichid (rezistențele de contact R_{c_1}, R_{c_2}, rezistența internă a probei R_i, capacitățile de contact C_{c_1}, C_{c_2}, capacitatea internă a probei.

În scopul determinării unei expresii de calcul pentru tensiunea la bornele AB, se operează cu o rezistență echivalentă R și o capacitate echivalentă C.

O problemă importantă o reprezintă adoptarea unei configurații de studiu încît inductivitatea conexiunilor să nu producă oscilații la borna A. În acest sens se adoptă un circuit echivalent RC pentru porțiunea AB (fig. 3) și se scriu ecuațiile diferențiale pentru schema din fig. 3, la aplicarea unui impuls de tensiune.

$$U = L_c \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_c\, i + u$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$i_1 = \frac{u}{R},\quad i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

din sistemul (1) rezultă :

$$CL_c \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(R_e C + \frac{L_c}{R}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_c}{R} + 1\right)\mu = U \tag{2}$$

Soluțiile ecuației diferențiale sînt :

$$u(t) = k\,U\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_a\sqrt{1-\xi^2}\,t + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right] \tag{3}$$

pentru $\xi < 1$

$$u(t) = kU\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \operatorname{sh}\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\, t + \operatorname{arc\,th} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi}\right)\right] \quad (4)$$

pentru $\xi > 1$

S-au folosit notațiile :

$$\xi = \frac{R_c C + \dfrac{L}{R_c}}{2\sqrt{C L_c + \left(\dfrac{R_c}{R} + 1\right)}}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\dfrac{R_c}{R} + 1}{C L_c}}; \quad k = \frac{1}{\dfrac{R_c}{R} + 1} \quad (5)$$

Răspunsul tranzitoriu al configurației ecran izolant-cristal lichid pentru o treaptă unitară de tensiune este arătat în fig. 4. Timpul de răspuns al schemei este proporțional cu ariile hașurate din fig. 4 a și b.

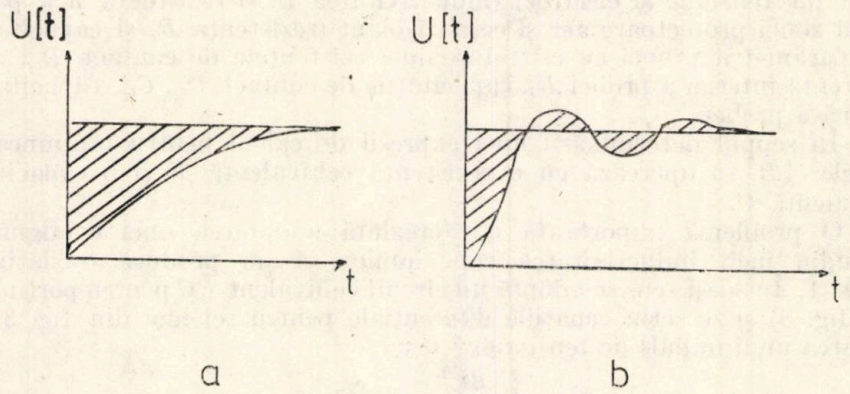


Fig. 4 — Răspunsul tranzitoriu la treaptă unitară de tensiune aplicată; a) răspuns aperiodic; b) răspuns oscilant amortizat.

Parametrii cristalului lichid variază în funcție de structură. Corelat cu valorile rezistenței și capacității cristalului lichid, variază tensiunea și deci intensitatea cîmpului electric, care conduce la impresionarea diferențiată a filmului fotografic.

Concluzii

Utilizarea electronografiei în studiul sarcinii spațiale din cristalul lichid permite o cunoaștere în volum a acestuia.

În același timp face posibilă diferențierea pe o fotografie electronografică a unui țesut viu a sistemelor tip cristal lichid ce intră în componența acestora. O astfel de cunoaștere este deosebit de importantă în investigarea nedistructivă a celulelor biologice.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Meier, V. Sackmann, J. P. Grabmaier*, Applications of liquid crystals, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1975).
2. *G. W. Gray, R. A. Wilson*, Liquid Crystals and Plastic Crystals, John Wiley and Sons, New York (1974).
3. *M. Honciuc, C. Moțoc*, Analiza capacitivă a unor cristale lichide, Mol. Cryst., Liq., Cryst. (1982)
4. *E. E. Lane*, Electrophotography, And ar Press, 3431 Rincon Annex, San Francisco, (1975).
5. *M. D. Gabovici*, Fizica și tehnica surselor de ioni cu plasmă, Editura științifică și enciclopedică (1976).

The Possibility to Obtain Electronographic Images on Liquid Crystals

The use of electronography in the study of the spatial charge in liquid crystals gives information on their bulk electric properties.

At the same time, it permits the differentiation on an electronographic image of a living tissue between the liquid crystal type systems contained in the structure of the sample. Such information is very important in the non-distructive investigation of the living cells.

C. Z.: 530.145 : 519.2

APLICAȚII ALE STATISTICII INFORMAȚIONALE ONICESCU ÎN MECANICA CUANTICĂ-ENERGIA INFORMAȚIONALĂ ONICESCU A LOCALIZĂRII CUANTICE RADIALE A ELECTRONULUI ÎN ATOMII HIDROGENOIZI

V. SCRIDONESI-CĂLIN, M. VASIU*

În lucrare se obțin expresiile analitice și valorile numerice ale energiei informaționale Onicescu pentru localizarea cuantică radială a electronului în pelicula sferică $r \in [r, r+dr]$ de atom hidrogenoid, luîndu-se în considerare toate subansamblurile de evenimente statistice independente, corespunzînd tuturor stărilor cuantice caracterizate de $n = \overline{1,5}$ și $l = \overline{0, n-1}$, ale electronului în atomii hidrogenoizi.

Comparația cu entropia informațională Shannon este făcută, prin evaluarea acesteia, pentru ansamblul statistic K corespunzător localizării cuantice a electronului 1s, evidențiindu-se avantajele evaluării energiei informaționale Onicescu ca indicator informațional global și dependența ei de n și l.

Rezultatele lucrării constituie întîia aplicare în mecanica cuantică a statisticii informaționale creată de acad. Octav Onicescu.

Introducere

Odată cu interpretarea statistică Born-Jordan-Kármán (1926) [1] a funcției de undă, calea spre abordarea informațională în mecanica cuantică devine deschisă, prin oricare din elaborările ce vor fi, ulterior, dezvoltate în teoria informației: Shannon (1948) [2], Brillouin (1956), [5], Onicescu (1966) [6, 7], Ben-Shaul-Levine-Bernstein (the surprisal theory, 1972) [9], etc. Primele două elaborări și cea de-a patra au la bază, practic, același indicator statistic informațional global: *entropia Shannon*. Elaborarea Onicescu are un indicator statistic informațional global distinct: *energia informațională Onicescu*. Punem problema abordării informaționale a localizării cuantice a electronului în atomii hidrogenoizi, în sensul teoriei Onicescu a informației, dezvoltată în cadrul statisticii informaționale Onicescu [6, 7, 10]. În acest scop, vom explicita analitic și vom calcula numeric energia informațională Onicescu a sistemului de evenimente statistice, generat prin localizarea cuantică radială a electronului în pelicula sferică $r \in [r,\ r + dr]$.

Necesitatea comparației cu entropia informațională Shannon, ca și o parte din justificările opțiunii pentru evaluarea analitică și numerică a energiei informaționale Onicescu, vor fi ilustrate cu ajutorul evaluării indicatorului informațional global Shannon, pentru localizarea electronului 1s generînd ansamblul K de evenimente statistice de localizare cuantică. Dependența energiei informaționale Onicescu de numerele cuantice

* Asist. Catedra Fizică; Prof. dr. Facultatea de Fizică, Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca.

n și l va fi exprimată analitic, numeric și grafic, luînd în considerare toate stările cuantice ale electronului, caracterizate prin 1,5 și $l = \overline{0, n-1}$.

1. Densitatea de probabilitate a localizării cuantice radiale

Densitatea de probabilitate [4] ce caracterizează ansamblul de evenimente statistice generate de localizarea cuantică a electronului în pelicula sferică $r \in [r, r + dr]$ de atom hidrogenoid ($X^{+(z-1)}$), independentă de valorile unghiurilor polar θ și azimutal φ, are expresia:

(1) $f_{nl}(r) = C'_{nl} R^2_{nl}(r) \cdot r^2$, dependentă de numerele cuantice: principal n și orbital l. În (1), r reprezintă distanța față de nucleul atomic la care se găsește electronul, C'_{nl} constanta de normare a probabilității, $R_{nl}(r)$ funcția de undă radială a electronului în cîmpul existent în sistemul cuantic hidrogenoid considerat.

Explicitarea funcției $R_{nl}(r)$ [4] transformă (1) în:

$$(2)\quad f_{nl}(r) = C''_{nl}\left[L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2\lambda}{n} r\right)\right]^2 r^{2(l+1)} \exp\left(-\frac{2\lambda}{n} r\right), \text{ cu } L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2\lambda}{n} r\right)$$

polinomul Laguerre asociat [3], C''_{nl} o nouă constantă obținută prin multiplicarea constantei C'_{nl} cu un factor constant, și

(3) $\lambda = Z/a_0$, în care Z este numărul atomic, iar $a_0 = 5{,}29167(7) \cdot 10^{-11}$ m constantă universală.

Forma operațională a densității de probabilitate f_{nl}, pentru necesitățile de evaluare analitică și numerică, ca și pentru cele de interpretare, din lucrare, se explicitează astfel:

$$(4)\quad f_{nl}(r) = C_{nl} L_{nl}(r)^{2(l+1)} \exp\left(-\frac{2\lambda}{n} r\right),$$

cu funcția polinomială $L_{nl}(r)$ obținută din:

$$(5)\quad L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2\lambda}{n} r\right) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+1} \frac{[(n+l)!]^2}{k!(n-l-k-1)!(2l+k+1)!} \left(\frac{2\lambda}{n} r\right)^k$$

prin ridicare la pătrat, aducere la forma ireductibilă și plasare a factorului constant de multiplicare în constanta C_{nl} de normare a densității de probabilitate. Condiția de normare a densității de probabilitate (4), care ne furnizează constanta C_{nl} este:

$$(6)\quad \int_0^\infty f_{nl}(r)\, dr = 1.$$

Dependența de n și l a lui $f_{nl}(r)$, prin (4) și (5), pune în evidență următoarea organizare a mulțimii evenimentelor statistice de localizare cuantică a electronului în pelicula sferică $r \in [r, r + dr]$ de atom hidrogenoid: a) pentru fiecare valoare a lui n, există cîte un ansamblu de evenimente statistice (evenimente de „strat"), obținîndu-se astfel ansamblurile: $K(n = 1)$, $L(n = 2)$, $M(n = 3)$, $N(n = 4)$, $0(n = 5)$, etc; b) evenimentele unui ansamblu statistic (n dat) reunesc n subansambluri statistice distincte de evenimente independente (evenimente de „stare cuantică"), existînd subansamblurile: ns $(l = 0)$, np $(l = 1)$, nd $(l = 2)$, nf $(l = 3)$, $ng(l = 4)$, etc.

Caracterizarea informațională globală a fiecărui subansamblu de evenimente statistice de localizare cuantică, respectiv a fiecărui ansamblu, se poate face cu ajutorul celor doi indicatori informaționali distinct, definiți în teoria informației, și precizați în introducere.

2. Entropia informațională Shannon pentru ansamblul K de evenimente de localizare cuantică

Entropia informațională Shannon [2], considerată pentru un sistem continuu de evenimente statistice, de interes în lucrare, se particularizează, cu ajutorul formulei generale de definiție:

$$S = -\int_{-\infty}^{\infty} f(r) \log [f(r)]\, dr, \quad \text{prin (4), la:} \tag{7}$$

$$S_{nl} = -C_{nl}\int_{0}^{\infty} L_{nl}(r) r^{2(l+1)} \exp\left(\frac{2\lambda}{n} r\right) \log\left[C_{nl} L_{nl}(r) r^{2(l+1)} \exp\left(\frac{2\lambda}{n} r\right)\right] dr \tag{8}$$

Ansamblul K de evenimente statistice de localizare cuantică oferă cea mai rapidă evaluare a entropiei informaționale Shannon, necesară comparației cu energia informațională Onicescu corespunzătoare, precum și unei părți din justificările evaluării energiei informaționale Onicescu în prezenta lucrare. Cu $n = 1$ și $l = 0$ în (4) și (5), după aplicarea condiției de normare (6), se obține densitatea de probabilitate:

$$f_{10}(r) \equiv f_K(r) = 4\lambda^3 r^2 \exp(-2\lambda r), \tag{9}$$

care prin (8) conduce la entropia informațională Shannon:

$$S_{10} \equiv S_K = 4\lambda^3 \{ -[\ln(4\lambda^3)] I_2 + 2(\lambda I_3 - I)\}. \tag{10}$$

La obținerea expresiei (10) s-a utilizat logaritmul natural, din motive de comoditate, în oricare bază logaritmică rezultatele fiind afectate doar de o constantă de multiplicare finită, nenulă și ușor de reconstituit prin for-

mula de schimbare a bazei logaritmice. Integralele I_2 și I_3 din (10) sînt de tipul:

$$(11) \qquad I_m = \int_0^\infty r^m \exp(\alpha r)\mathrm{d}r \text{ (cu } m = 2, \text{ respectiv 3 și } \alpha = -2\lambda),$$

iar I are expresia:

$$(12) \qquad I = \int_0^\infty r^2 \exp(-2\lambda r) \ln r \, \mathrm{d}r.$$

Integrala (12), la integrarea succesivă prin părți, se desface într-o sumă algebrică de limite și integrale de tipul (11) pentru $m = 0$ și $m = 1$, precum și integrala:

$$(13) \qquad I_s = \int_0^\infty r^{-1} \exp(-2\lambda r)\, \mathrm{d}r.$$

Evaluarea integralelor de tipul (11) [8], după trecerea la limitele de integrare, este rapidă. Se obține, astfel, relația foarte utilă în lucrarea noastră:

(14) $I_m = m! \, |\alpha|^{-(m+1)}$. Integrala I_s din (13) are primitiva [8]:

$$(15) \qquad I'_s = \int r^{-1} \exp(\alpha r)\, \mathrm{d}r = \ln|r| + \frac{\alpha r}{1} + \frac{\alpha^2 r^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\alpha^3 r^3}{3 \cdot 3!} +$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha^k r^k}{k \cdot k!} + \cdots$$

Cu I, I_2 și I_3 din (10) evaluate prin (14) și (15), entropia informațională Shannon S_K se transformă într-o expresie matematică divergentă:

$$(16) \qquad S_K = -\ln(4\lambda^3) - 2\lim_{r\to\infty}\left\{ \ln|r| + g_1(r)\left[1 - \frac{g_2(r)}{g_1(r)}\right]\right\},$$

avînd în vedere că:

$$(17) \qquad g_1(r) = \frac{(2\lambda)^2 r^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2\lambda)^4 r^4}{4 \cdot 4!} + \cdots + \frac{(2\lambda)^{2k} r^{2k}}{2k \cdot (2k)!} + \cdots,$$

$$(18) \qquad g_2(r) = \frac{2\lambda r}{1} + \frac{(2\lambda)^3 r^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(2\lambda)^{2k-1} r^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} + \cdots,$$

și că, prin (3), λ este strict pozitivă.

Pentru localizarea cuantică radială a electronului 1s generînd ansamblul statistic K, rezultatul (16) indică imposibilitatea caracterizării informaționale globale cu ajutorul teoriei Shannon-Brillouin a informației [2, 5].

3. Energia informațională Onicescu a localizării cuantice radiale pentru cazurile $n = \overline{1,5}$ și $l = \overline{0,\ n-1}$

Impasul informațional de tipul celui exemplificat prin rezultatul (16) (în cazul $n = 1$, $l = 0$) se poate evita prin înlocuirea entropiei informaționale Shannon cu energia informațională Onicescu, pe care o vom evalua analitic și numeric pentru toate ansamblurile și subansamblurile de evenimente statistice de localizare cuantică radială, caracterizate de $n = \overline{1,\ 5}$ și $l = \overline{0,\ n-1}$. Indicatorul statistic informațional global energia informațională Onicescu [6, 7, 10], pentru un sistem continuu de evenimente statistice, are expresia generală:

$$O(-\infty;\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(r)\cdot \mathrm{d}r. \tag{19}$$

Pentru localizarea cuantică în discuție, (19) ia forma particulară:

$$O_{nl}(0,\ \infty) = \int_{0}^{\infty} f_{nl}^2(r)\,\mathrm{d}r, \tag{20}$$

dependentă de numerele cuantice n și l. Cu (4) în (20), avem:

$$O_{nl}(0;\ \infty) = C_{nl}^2 \int_{0}^{\infty} L_{nl}^2(r) r^{4(l+1)} \exp\left(-\frac{4\lambda}{n} r\right) \mathrm{d}r, \tag{21}$$

reprezentînd energia informațională Onicescu corespunzătoare subansamblului de evenimente statistice, generat de localizarea cuantică radială a electronului aflat în starea cunatică nl în atomul hidrogenoid.

Cu C_{nl} calculată prin (6), $L_{nl}(r)$ prin (5), relația generală (21) se explicitează, pe rînd, pentru fiecare din subansamblurile de evenimente statistice caracterizate de fiecare pereche $(n;\ l)$ rezultată din $n = \overline{1,5}$ și $l = \overline{0,\ n-1}$. Astfel, pentru subansamnlul statistic 1s (identic cu ansamblul statistic K), cu $n = 1$ și $l = 0$, algoritmul menționat mai sus explicitează analitic energia informațională Onicescu:

$$O_{10}(0;\infty) \equiv O_K(0;\infty) = 16\lambda^6 \cdot \int_{0}^{\infty} r^4 \exp(-4\lambda r)\,\mathrm{d}r = 16\lambda^6 I_4, \tag{22}$$

cu I_4 de tipul (11) (pentru $m = 4$ și $\alpha = -4\lambda$).

Pentru $n \geqslant 2$, fiecare ansamblu statistic este organizat în două sau mai multe subansambluri statistice. De aceea, energiile informaționale Onicescu, obținute prin algoritmul ce a condus la (22), vor fi sintetizate, precizîndu-se ansamblul statistic, valorile lui n și prin notația O_{nl}, subansamblurile corespunzătoare.

3.1. *Ansamblul statistic* $L\ (n = 2\,;\ l = 0\,;\ 1)$

$$(23)\quad O_{20}(0\,;\,\infty) \equiv O_{2s} = 2^{-6}\cdot\lambda^6(16I_4 - 32\lambda I_5 + 24\lambda^2 I_6 - 8\lambda^3 I_7 + \lambda^4 I_8) \text{ și}$$

$$(24)\quad O_{21}(0\,;\,\infty) \equiv O_{2p} = 2^{-6}3^{-2}\lambda^{10}\cdot\int_0^\infty r^8 \exp(-2\lambda r)\,dr = 2^{-6}4^{-2}\lambda^{10}I^8,$$

cu integralele $I_m\ (m = \overline{4,8})$ de tipul (11), avînd toate $\alpha = -2\lambda$ și aceleași limite de integrare.

3.2. *Ansamblul statistic* $M\ (n = 3;\ \ l = \overline{0,\ 2})$

$$(25)\quad O_{30}(0\,;\,\infty) \equiv O_{3s} = 2^{43^{-18}}\lambda^6(531441\,I_4 - 1417176\,\lambda I_5 +$$

$$+ 1574640\,\lambda^2 I_6 - 944784\,\lambda^3 I_7 + 332424\,\lambda^4 I_8 - 69984\,\lambda^5 I_9 + 8640\,\lambda^6 I_{10} -$$

$$- 576\,\lambda^7 I_{11} + 16\,\lambda^8 I_{12}),$$

$$(26)\quad O_{31}(0\,;\,\infty) \equiv O_{3p} = 2^{63^{-18}}\lambda^{10}(1296 I_8 - 864\,\lambda I_9 + 216\,\lambda^2 I_{10} -$$

$$- 24\,\lambda^3 I_{11} + \lambda^4 I_{12}) \text{ și}$$

$$(27)\quad O_{32}(0\,;\,\infty) \equiv O_{3d} = 2^{63^{-18}5^{-2}}\lambda^{14}\cdot\int_0^\infty r^{12}\exp\left(-\frac{4}{3}\lambda r\right)dr =$$

$$= 2^{63^{-18}5^{-2}}\lambda^{14} I_{12},$$

cu $I_m\ (m = \overline{4,12})$ de tipul (11), avînd toate $\alpha = -\frac{4}{3}\lambda$ și aceleași limite de integrare.

3.3. *Ansamblul statistic* $N\ \ (n = 4;\ \ l = \overline{0,3})$

$$(28)\quad O_{40}(0\,;\,\infty) \equiv O_{4s} = 2^{-8}\lambda^6\ (I_4 - 3\lambda I_5 + \frac{31}{8}\lambda^2 I_6 - \frac{17}{6}\lambda^3 I_7 +$$

$$+ \frac{999}{786}\lambda^4 I_8 - \frac{101}{256}\lambda^5 I_9 + \frac{499}{6144}\lambda^6 I_{10} - \frac{47}{4096}\lambda^7 I_{11} + \frac{109}{98304}\lambda^8 I_{12} -$$

$$-\frac{127}{1769472}\lambda^9 I_{13}+\frac{7}{2359296}\lambda^{10}I_{14}-\frac{1}{14155776}\lambda^{11}I_{15}+$$

$$+\frac{1}{1358954500}\lambda^{12}I_{16}\Big),$$

(29) $$O_{41}(0;\infty)\equiv O_{4p}=2^{-16}3^{-2}5^2\lambda^{10}\Big(I_8-\lambda I_9+\frac{17}{40}\lambda^2 I_{10}-$$

$$-\frac{1}{10}\lambda^3 I_{11}+\frac{91}{6400}\lambda^4 I_{12}-\frac{1}{800}\lambda^5 I_{13}+\frac{17}{256000}\lambda^6 I_{14}-$$

$$-\frac{1}{512000}\lambda^7 I_{15}+\frac{1}{40960000}\lambda^8 I_{16}\Big),$$

(30) $$O_{42}(0;\infty)\equiv O_{4d}=2^{-28}3^{-4}5^{-2}\lambda^{14}\Big(1296 I_{12}-432\lambda I_{13}+$$

$$+54\lambda^2 I_{14}-3\lambda^3 I_{15}+\frac{1}{16}\lambda^4 I_{16}\Big)\text{ și}$$

(31) $$O_{43}(0;\infty)\equiv O_{4f}=2^{-32}3^{-4}5^{-2}7^{-2}\lambda^{18}\cdot\int_0^\infty r^{16}\exp(-\lambda r)\,dr=$$

$$=2^{-32}3^{-4}5^{-2}7^{-2}\lambda^{18}I_{16},$$

cu $I_m (m=\overline{4,16})$ de tipul (11), avînd toate $\alpha=-\lambda$ și aceleași limite de integrare.

3.4. *Ansamblul statistic* O $(n=5;\ l=\overline{0,4})$

(32) $$O_{50}(0;\infty)\equiv O_{5s}=2^4 3^{-4}5^{-10}\lambda^6(50256 I_4-162000\lambda I_5+$$

$$+226800\lambda^2 I_6-183600\lambda^3 I_7+95947{,}2\lambda^4 I_8-34318{,}08\lambda^5 I_9+$$

$$+8709{,}12\lambda^6 I_{10}-1003104\cdot 5^{-4}\lambda^7 I_{11}+3404304\cdot 5^{-6}\lambda^8 I_{12}-$$

$$-1714368\cdot 5^{-7}\lambda^9 I_{13}+640704\cdot 5^{-8}\lambda^{10}I_{14}-176448\cdot 5^{-9}\lambda^{11}I_{15}+$$

$$+176096\cdot 5^{-11}\lambda^{12}I_{16}-24704\cdot 5^{-12}\lambda^{13}I_{17}+2304\cdot 5^{-13}\lambda^{14}I_{18}-$$

$$-128\cdot 5^{-14}\lambda^{15}I_{19}+16\cdot 5^{-16}\lambda^{16}I_{20}),$$

$$(33)\quad O_{51}(0;\infty) \equiv O_{5p} = 2^{63-65-14}\lambda^{10}(81\cdot 10^4 I_8 - 972\cdot 10^3\lambda I_9 +$$

$$+ 515160\lambda^2 I_{10} - 159192\lambda^3 I_{11} + 797769\cdot 5^{-2}\lambda^4 I_{12} - 546264\cdot 5^{-3}\lambda^5 I_{13} +$$

$$+ 1310688\cdot 5^{-5}\lambda^6 I_{14} - 444528\cdot 5^{-6}\lambda^7 I_{15} + 529416\cdot 5^{-8}\lambda^8 I_{16} -$$

$$- 86496\cdot 5^{-9}\lambda^9 I_{17} + 9216\cdot 5^{-10}\lambda^{10} I_{18} - 576\cdot 5^{-11}\lambda^{11} I_{19} + 16\cdot 5^{-12}\lambda^{12} I_{20}),$$

$$(34)\quad O_{52}(0;\infty) \equiv O_{5d} = 2^{63-45-187-2}\lambda^{14}(194481 I_{12} - 103723{,}2\lambda I_{13} +$$

$$+ 23708{,}16\lambda^2 I_{14} - 378672\cdot 5^{-3}\lambda^3 I_{15} + 147784\cdot 5^{-4}\lambda^4 I_{16} -$$

$$- 36064\cdot 5^{-5}\lambda^5 I_{17} + 5376\cdot 5^{-6}\lambda^6 I_{18} - 448\cdot 5^{-7}\lambda^7 I_{19} + 16\cdot 5^{-8}\lambda^8 I_{20}),$$

$$(35)\quad O_{53}(0;\infty) \equiv O_{5f} = 2^{23-45-227-2}\lambda^{18}(4096 I_{16} - 819{,}2\lambda I_{17} +$$

$$+ 61{,}44\lambda^2 I_{18} - 256\cdot 5^{-3}\lambda^3 I_{19} + 16\cdot 5^{-4}\lambda^4 I_{20}) \text{ și}$$

$$(36)\quad O_{54}(0;\infty) \equiv O_{5g} = 2^{63-85-267-2}\lambda^{22}\cdot\int_0^\infty r^{20}\exp\left(-\frac{4}{5}\lambda r\right)dr =$$

$$= 2^{63-85-267-2}\lambda^{22} I_{20},$$

cu $I_m\ (m = \overline{4,20})$ de tipul (11), avînd toate $\alpha = -\frac{4}{5}\lambda$ și aceleași limite de integrare.

Valorile numerice (în unități convenționale $\lambda = Z/a_0$) au fost evaluate și înregistrate în tabelul 1, pentru toate energiile informaționale

Tabelul 1

Energiile informaționale Onicescu ale localizării cuantice radiale pentru $n = \overline{1,5}$ și $l = \overline{0,\ n-1}$

Ansamblul statistic (stratul)	Subansamblul statistic (starea cuantică)	n	l	n_r	$O_{nl}(0;\infty)$ $[Z/a_0]$
K	1s	1	0	0	0,3750000
L	2s	2	0	1	0,1289662
	2p	2	1	0	0,1367187
M	3s	3	0	2	0,0664067
	3p	3	1	1	0,0670934
	3d	3	2	0	0,0751953
N	4s	4	0	3	0,0408853
	4p	4	1	2	0,0411267
	4d	4	2	1	0,0422973
	4f	4	3	0	0,0490951
O	5s	5	0	4	0,0281250
	5p	5	1	3	0,0281618
	5d	5	2	2	0,0283593
	5f	5	3	1	0,0296534
	5g	5	4	0	0,0352394

Onicescu relatate prin (22)—(36), cu ajutorul relației (11) calculîndu-se integralele corespunzătoare .

4. Interpretări și concluzii

Tabelul nr. 1, expunînd energiile informaționale Onicescu corespunzătoare celor 15 subansambluri de evenimente statistice de localizare cuantică radială a electronului în atomul hidrogenoid caracterizat de numărul atomic Z, ne permite următoarele constatări sintetizate ca interpretări și concluzii :

4.1. energia informațională Onicescu $O_{nl}(0\,;\,\infty)$ a localizării cuantice radiale depinde de numerele cuantice principal n și orbital l;

4.2. dependența de n și l a lui O_{nl} $(0\,;\,\infty)$este implicată într-o expresie de tip integrală, exprimată prin (21), cu funcțiile L_{nl} (r) date prin (5);

4.3. pentru toate subansamblurile de evenimente statistice, O_{nl} $(0\,;\infty)$ se exprimă prin raportul Z/a_0, care poate fi considerat unitate convențională de măsură pentru $O_{nl}(0\,;\,\infty)$;

4.4. trecerea de la un atom hidrogenoid cu Z dat la altul cu $Z' = Z+1$ indică cuantizarea energiei informaționale Onicescu prin numărul atomic Z;

4.5. pentru n variabil și l = const., trecînd de la un ansamblu statistic la altul, energia informațională Onicescu a localizării cuantice radiale

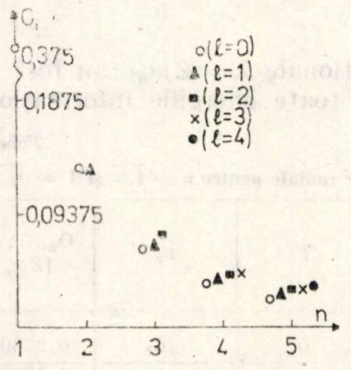


Fig. 1 $O(0\,;\infty)=f_1(n)$ $(l$ = const)[a]

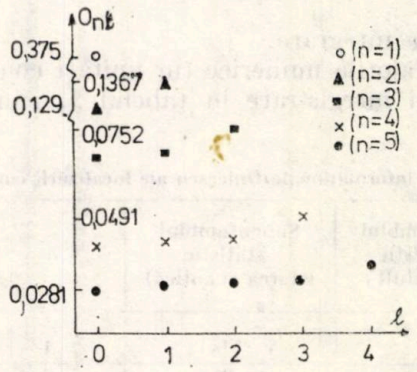


Fig. 2. $O\,(0\,;\infty) = f_2(l)$ $(n$ = const)[b].

a) prin raportare la $O_{10}\,(0\,;\infty)$;
b) prin raportare la $O_{21}(0\,;\infty)$.

scade cu creșterea lui n(cum indică și reprezentarea grafică din fig. 1);

4.6. În cadrul unui ansamblu statistic (n = const.), O_{nl} $(0\,;\,\infty)$ crește de la un subansamblu la altul, odată cu creșterea numărului cuantic orbital l (cum indică și reprezentarea grafică din fig. 2);

4.7. ansamblului statistic K (identic cu subansamblul statistic 1s), corespunzînd stării cuantice cu cea mai joasă energie fizică, îi corespunde energia informațională Onicescu maximă, pentru un Z dat;

4.8. în cadrul unui ansamblu statistic, subansamblul statistic cu l nul are cea mai mică energie informațională Onicescu;

4.9. concluzia 4.8. se explică prin faptul că, pentru $l = 0$, funcția de undă radială $R_{nl}(r)$ are număr maxim de noduri netriviale ($n_r = n - l - 1$), ceea ce face ca intervalul de integrare $[0 ; \infty)$ din (21) să cuprindă și punctele în care densitatea de probabilitate $f_{nl}(r)$ se anulează;

4.10. în cadrul fiecărui ansamblu statistic, saltul cel mai mare al valorii lui $O_{nl}(0 ; \infty)$, de la un subansamblu la altul, apare trecînd de la $n_r = 1$ la $n_r = 0$, ceea ce exprimă trecerea de la o funcție radială $R_{nl}(r)$ cu un singur nod netrivial la una fără noduri netriviale;

4.11. raportul $F = O_{nl}(0 ; \infty)/O_{nl'}(0 ; \infty)$, cu $l' < l$, satisface, pentru subansamblurile oricărui ansamblu statistic, condiția: (37) $1 < F < 2$;

4.12. cum subansamblurile de evenimente statistice sînt independente, energia informațională Onicescu a întregului ansamblu statistic [6, 7, 10] se obține prin:

$$O_n(0 ; \infty) = \prod_{l=0}^{n-1} O_{nl}(0 ; \infty), \text{ cu } n = \overline{1,5}; \tag{38}$$

4.13. energia informațională Onicescu, caracterizînd ansamblul tuturor evenimentelor statistice de localizare cuantică pentru $n = \overline{1,5}$ și $l = \overline{0, n-1}$ se exprimă, cu (38), prin:

$$O(0 ; \infty) = \prod_{n=1}^{5} \cdot \prod_{l=0}^{4} O_{nl}(0 ; \infty), \text{ la un } Z \text{ dat.} \tag{39}$$

Din compararea rezultatelor paragrafelor 2 și 3, se poate trage concluzia că: algoritmul de calcul pentru energia informațională Onicescu este, avantajos, mai restrîns și mai rapid decît cel pentru entropia informațională Shannon, pe de o parte, iar pe de alta, că energia informațională Onicescu, neprezentînd divergență, poate evita impasul informațional introdus, în anumite cazuri,de divergența entropiei informaționale (cauzată de prezența logaritmului în expresia ei analitică), înlocuind-o ca indicator statistic informațional global.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Born*, „The Mechanics of the Atoms", Bell, 1927;
2. *C. E. Shannon*, Bell. Syst. Tech. Journal *27*, 379; 623 (1948);
3. *R. Courant, D. Hilbert*, „Methods of Mathematical Physics", Interscience Publishers, Inc., New York, 1953, vol. I, chap. II, VII;
4. *L. I. Schiff*, „Quantum Mechanics", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955, chap. II, IV.
5. *L. Brillouin*, „Science and Information Theory", Academic Press, Inc., New York, 1956, chap. 12;
6. *O. Onicescu*, „Energia informațională", în St. Cerc. Mat. *18*, 1419 (1966);
7. *O. Onicescu*, „Theorie de l'information. Énergie informationnelle", în Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) *263A*, 841 (1966);

8. *M. L. Smolianski*, „Tabliți neopredelenih integrlov", Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1967 cap. IV;
9. *A. Ben-Shaul, R. D. Levine, R. B. Bernstein*, J. Chem. Phys. 57, 434, 5437, 5447 (1972);
10. *O. Onicescu, V. Ştefănescu*, „Elemente de statistică informațională cu aplicații", Editura tehnică, București, 1979.

Applications of the Onicescu Informational Statistics in Quantum Mechanics-Onicescu Informational Energy of the Radial Quantum Localization of the Electron in Hydrogen-like Atoms

In the paper the analytical expressions and the numerical values of Onicescu informational energy for the radial quantum localization of the electron in the $r \in [r, r + dr]$ spherical pellicle of hydrogen-like atom are obtained, taking into account all subassemblies of independent statistical events which correspond to all quantum states characterized by $n = \overline{1,5}$ and $l = \overline{0, n-1}$ of the electron in hydrogen-like atoms.

The comparison with the Shannon informational entropy has been done by evaluating it for the K statistical assembly corresponding to the quantum localization of the 1s electron, revealing the advantages of the Onicescu informational energy evaluation as a total informational indicator and its dependence of n and l.

The results of the paper are the first application of the Onicescu informational statistics in quantum mechanics.

C.Z.: 621.315.211 : 678

ASUPRA DETERMINĂRII TIMPULUI DE APARIȚIE A DEFECTELOR MICROSTRUCTURALE ÎN CABLURILE ELECTRICE CU IZOLAȚIA DIN POLIETILENĂ

H. GAVRILĂ, GH. LĂZĂRESCU, DOINA GAVRILĂ *

În lucrare se propune dezvoltarea modelului teoretic datorat lui Tanaka privitor la modul de apariție și de evoluție a defectelor microstructurale în izolația cablurilor electrice de înaltă tensiune. Rezultatele obținute sînt folosite pentru analizarea procesului de pătrundere a umidității în izolația de polietilenă a cablurilor electrice normale. Se face o determinare precisă a timpului critic al procesului de inducție a microparticulelor de apă în izolația cablului.

În ultimii ani au fost făcute eforturi deosebite, atît pe plan teoretic, cît și al investigărilor experimentale, pentru studierea defectelor microstructurale care apar în izolația de polietilenă a cablurilor electrice de înaltă tensiune. Acest studiu a fost orientat în special asupra următoarelor două aspecte esențiale: elucidarea modului de apariție și de evoluție a defectelor microstructurale și stabilirea măsurilor ce trebuie luate pentru a reduce cît mai mult posibilitatea apariției și dezvoltării acestor defecte, care au un efect net defavorabil asupra exploatării și în special a duratei medii de viață a cablurilor.

În literatura de specialitate există puține abordări teoretice satisfăcătoare privitoare la studiul defectelor produse de diferitele tipuri de impurități. Amintim dintre acestea îndeosebi modelele Tanaka [1] și Sletback [2].

Modelul Tanaka se referă la apariția și modul de evoluție a defectelor microstructurale produse de apă prin fenomenul de dielectroforeză. Asupra impurităților acționează cîmpul electric stabilit în izolația cablului, densitatea locală a distribuției lor spațiale depinzînd de raportul în care se află fluxurile de particule (impurități) produse prin dielectroforeză și respectiv prin difuzie.

În lucrarea de față se prezintă o dezvoltare a modelului propus de Tanaka, rezultatele obținute fiind aplicate pentru aprecierea modului în care se dezvoltă și evoluează incluziunile de apă din izolația de polietilenă a cablurilor.

Modelul teoretic. Se consideră cazul unui cablu cilindric coaxial de raze R_1 (interioară, a conductorului) și R_2 (exterioară). În materialul electroizolant de permitivitate dielectrică ε_1 este cuprinsă, la depărtarea r

* Conf. dr. ing., Catedra Electrotehnică II; Șef lucrări dr.; Șef lucrări dr., Catedra Fizică

de axul cablului, o incluziune sferică de rază $a \ll r$ și permitivitate ε_2 (fig. 1).

Cîmpul electric ce ia naștere în izolația cablului într-un punct aflat la distanța r de ax, în absența incluziunii, este orientat radial, avînd expresia :

$$\bar{E}_0 = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r} \bar{r}^\circ, \qquad (1)$$

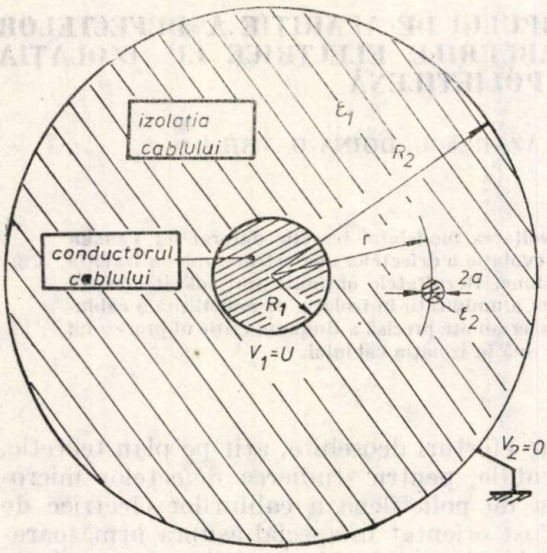


Fig. 1

în care U este căderea de tensiune pe izolația cablului (adică potențialul conductorului central în ipoteza că potențialul suprafeței exterioare a izolației este luat ca nivel de referință), iar $\bar{r}^\circ = \frac{\bar{r}}{r}$ este versorul direcției radiale.

Date fiind dimensiunile foarte mici ale incluziunii, pentru calculul forței ce se exercită asupra sa o putem considera plasată într-un cîmp electric omogen, de intensitate $\bar{E}_0$. Particula dielectrică fiind neîncărcată electric, trebuie integrată ecuația diferențială de tip Laplace a potențialului, cu condiții la limită corespunzătoare pe suprafața ce o separă de izolația cablului. Se obțin următoarele expresii ale intensității cîmpului în interiorul și, respectiv, în exteriorul incluziunii dielectrice :

$$\bar{E}_{int} = \frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \bar{E}_0,$$
$$\bar{E}_{ext} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \left[3 \frac{(\bar{E}_0 \bar{r}')\bar{r}'}{r'^5} - \frac{\bar{E}_0}{r'^3} \right] + \bar{E}_0, \qquad (2)$$

unde $\bar{r}'$ este vectorul de poziție al punctului în care se calculează cîmpul în raport cu centrul incluziunii.

Din ultima relație (2) rezultă, prin identificare, expresia momentului electric ce trebuie atribuit incluziunii polarizate :

$$\bar{p} = 4\pi\varepsilon_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \bar{E}_0. \qquad (3)$$

Pentru calculul forței căutate se aplică acum relația :

$$\bar{F}_{de} = (\bar{p}\ \mathrm{grad})\ \bar{E}_0,$$

și se obține imediat :

$$\bar{F}_{de} = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \left[\frac{\bar{p}}{r^2} - 2 \frac{(\bar{p}\bar{r})\bar{r}}{r^4} \right] = -4\pi\varepsilon_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{U^2}{\left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \frac{a^3}{r^3} \bar{r}^\circ, \tag{4}$$

fiind util de remarcat că sensul acestei forțe depinde de raportul în care se află permitivitățile dielectrice ale izolației cablului și ale materialului de impurificare.

Simultan cu forța $\bar{F}_{de}$, care tinde să deplaseze incluziunea în materialul electroizolant, asupra ei va acționa și o forță rezistentă, datorată ciocnirilor, a cărei expresie este dată de relația lui Einstein :

$$F_{dif} = \frac{m}{\tau} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

cu $\tau = \frac{mD}{kT}$, în care m este masa incluziunii, D coeficientul de difuzie a materialului, iar T temperatura absolută a mediului.

În majoritatea electroizolanților solizi, mișcarea incluziunilor este atît de lentă încît se poate considera uniformă ($\bar{F}_{de} + \bar{F}_{dif} \cong 0$), viteza cu care migrează acestea fiind :

$$\bar{v}(r) = \alpha \tau U^2 \cdot \frac{1}{r^3} \bar{r}^\circ, \tag{6}$$

unde s-a notat :

$$\alpha = \frac{3}{\rho} \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{1}{\left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} = \text{const.},$$ ρ fiind densitatea materialului incluziunii.

În regim staționar, atunci cînd fluxul de particule (incluziuni) datorat fenomenului de dielectroforeză este egal cu cel datorat fenomenului de difuzie, repartiția lor spațială $n(r)$ rezultă din integrarea ecuației :

$$D \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = n\, v(r), \tag{7}$$

obținîndu-se :

$$n(r) = n_0 \exp\left(- \frac{\alpha U^2 m}{kT} \frac{1}{2r^2} \right) \tag{8}$$

Se observă că distribuția impurităților în lungul razei descrește exponențial cu pătratul depărtării de axul cablului, fiind astfel net mai densă în imediata vecinătate a conductorului, acolo unde și cîmpul electric

este mai intens, şi, dimpotrivă, cu mult mai puţin densă spre marginea izolaţiei cablului. Această tendinţă este cu atît mai pronunţată cu cît tensiunea de lucru a cablului este mai ridicată şi cu cît temperatura de funcţionare este mai coborîtă.

În ceea ce priveşte evoluţia în timp a distribuţiei spaţiale a incluziunilor, aceasta rezultă prin integrarea ecuaţiei de continuitate :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \Delta n - \operatorname{div}(n\bar{v}), \tag{9}$$

ecuaţie care, în coordonate cilindrice, ia forma :

$$D\left[\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{v}{D}\right)\frac{\partial n}{\partial r}\right] - n \operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial n}{\partial t}. \tag{9'}$$

Dacă se presupune că la momentul iniţial ($t = 0$), distribuţia incluziunilor este de tipul funcţiei Dirac $\delta(r - R_2)$, toate impurităţile aflîndu-se la marginea cablului — spre exemplu, ca urmare a aderării lor la suprafaţa sa exterioară sau ca efect al cufundării cablului într-un mediu agresiv —, atunci soluţia ecuaţiei (9′) este [1] :

$$n(r, t) = n_0(t)\sqrt{\frac{R_2}{r}}\exp\left[-\frac{\alpha U^2 m}{kT}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4Dt}(r - R_2)^2\right], \tag{10}$$

în care :

$$n_0(t) = \frac{\int_{R_1}^{R_2} n(r, t)\,dr}{\int_{R_1}^{R_2}\sqrt{\frac{R_2}{r}}\exp\left[-\frac{\alpha U^2 m}{kT}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4Dt}(r - R_2)^2\right]}. \tag{11}$$

Distribuţia spaţială a incluziunilor la diferite momente de timp este în mod esenţial determinată de factorul exponenţial din expresia (10). Punctele de extrem ale acestei distribuţii satisfac ecuaţia :

$$\left(\frac{r}{R_2}\right)^4 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 - \theta\frac{R_2^2 kT}{\alpha U^2 m}\left(\frac{r}{R_2}\right)^2 + \theta = 0 \tag{12}$$

în care mărimea adimensională :

$$\theta = -\frac{\alpha m U^2 D}{kT R_2^4} t \tag{13}$$

are semnificaţia unui timp relativ.

Se defineşte de obicei timpul critic al procesului ca intervalul de timp în care dispar punctele de extrem ale distribuţiei (10), astfel încît

el poate fi considerat o măsură a perioadei de inducție a defectelor microstructurale în izolația cablului. Se observă că pentru orice $\theta > \theta_{cr}$ (sau $t > t_{cr}$), toate incluziunile vor popula dens izolația în vecinătatea conductorului ($r = R_1$).

Pe baza rezultatelor de mai sus s-a analizat procesul pătrunderii umidității în izolația de polietilenă a unui cablu electric obișnuit, cu tensiunea de lucru $U = 15$ kV. Razele cablului s-au luat $R_1 = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ m și $R_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ m, iar temperatura sa de funcționare de cca 100°C. Permitivitatea dielectrică (relativă) a polietilenei este $\varepsilon_{r_1} = 2{,}2$, iar cea a apei $\varepsilon_{r_2} = 80{,}36$ (tocmai valoarea ridicată a acesteia din urmă face ca microparticulele de apă să fie cele mai puternic influențate de cîmpul electric al cablului). Raza a a particulei de apă s-a considerat a fi de același ordin de mărime cu dimensiunile medii ale diferitelor defecte structurale proprii polietilenei, adică de cca. 500 Å. În sfîrșit, coeficientul de difuzie D a apei în polietilenă s-a admis a fi de cca. 10^{-13} m^2/s.

Cu aceste date, ecuația (12) devine :

$$\left(\frac{r}{R_2}\right)^4 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 + 0{,}1324\,\theta\left(\frac{r}{R_2}\right)^2 + \theta = 0 \tag{14}$$

în care $\theta = 4{,}72 \cdot 10^{-8}\,t$. Dat fiind domeniul de variație al razei r, $\frac{r}{R_2} \in [0{,}1\,;\,1]$, este ușor de observat că termenul pătratic din ecuația (14) are o pondere mică, el putînd fi neglijat într-o primă aproximație. În aceste condiții ecuația (14) capătă forma mai simplă :

$$\left(\frac{r}{R_2}\right)^4 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^3 + \theta = 0 \tag{14'}$$

din care este ușor de dedus că distribuția $n(r)$ capătă un punct de inflexiune pentru $r_0 = \frac{3}{4} R_2$, valoarea critică a parametrului θ fiind $\theta_{cr} = \frac{27}{256}$.

Rezultă astfel că pentru $t > t_{cr} = 25{,}866$ zile maximul situat între r_0 și R_2 și minimul situat între R_1 și r_0 dispar, particulele de apă aglomerîndu-se în vecinătatea conductorului.

Trebuie încă observat că neglijarea mai sus acceptată echivalează cu a considera distribuția $n(r)$ a incluziunilor determinată exclusiv de factorul exponențial conținut în expresia (10).

Este în orice caz de remarcat că alura distribuției $n(r)$ este puternic influențată de constantele de material ale mediului, discuția mai sus făcută în cazul polietilenei impurificată cu microparticule de apă trebuie reluată cu datele exacte ale fiecărui caz concret în parte.

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Tanaka* ș.a., IEEE Transactions on PAS, vol. PAS-93, nr. 2, 693 (1974).
2. *J. Sletback*, IEEE Transactions on PAS, vol. PAS-98, nr. 4, 1358 (1979).

About the Initiation Time of Microstructural Trees in the Polyethylene Insulation of High Voltage Cables

In this paper we intend to improve the theoretical model proposed by Tanaka, concerning the possible mechanism of initiation and growth of microstructural trees in the insulation of high voltage cables. The results are used to analyse the humidity penetration in the polyethylene insulation of cables and to calculate the critical time for the induction of microstructural water droplets in cable insulation.

C.Z. : 538.3 :621.315.5

CALCULUL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR AL UNUI SISTEM DE CONDUCTOARE PARALELE

CHRISTIANA POPEEA *

În această lucrare se stabilesc ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele parcurse de curenți de aducție variabili în timp. De asemenea, se demonstrează posibilitatea caracterizării sistemului considerat ca multipol, prin intermediul unui set de relații liniare între curenții și căderile de potențial pe unitatea de lungime evaluate în lungul conductoarelor.

1. Introducere

Problema calculului cîmpului electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele parcurse de curenți de aducție variabili în timp intervine în numeroase aplicații de efect pelicular, curenți turbionari etc. Deoarece conductoarele se presupun nefiliforme, deci curenții se repartizează neuniform pe secțiunea acestora, problema de cîmp considerată prezintă numeroase dificultăți, unele legate de formularea ei corectă în sensul asigurării existenței și unicității soluției [1], altele legate de faptul că nu se poate defini o tensiune „în lungul firului" [2] în sensul teoriei circuitelor (caracterizare de multipol). Utilizînd ipotezele de bază formulate în [1], această lucrare își propune să stabilească sistemul minimal de ecuații ce descriu complet cîmpul electromagnetic cvasistaționar produs de un sistem de conductoare paralele parcurse de curenți, punînd în evidență caracteristicile generale de multipol ale sistemului considerat.

2. Ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar

Considerăm un sistem de coordonate cartezian avînd axa Oz paralelă cu direcția comună a conductoarelor. Deoarece geometria sistemului este prin ipoteză independentă de z, vom considera o secțiune transversală oarecare și vom nota cu D_k secțiunea conductorului k, de conductibilitate σ_k și permeabilitate μ_k, parcurs de curentul $i_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots m$ iar cu D_0 secțiunea dielectricului de separație dintre conductoare, con-

* Asistent ing., Catedra Electrotehnică

siderat perfect izolant și de permeabilitate μ_0. Fie $S_k \overset{\Delta}{=} \partial D_k$ contururile secțiunilor transversale ale conductoarelor, iar S_0 conturul unui ecran subțire perfect conductor ce separă sistemul considerat de exterior. (Prezența ecranului nu este necesară dacă presupunem că sistemul de conductoare este complet, adică $\sum_{k=1}^{m} i_k(t)=0$, [1]).

În interiorul conductoarelor ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar sînt :

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_k \dot{\bar{H}} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \sigma_k \bar{E} \tag{2}$$

În acord cu [1], considerăm cîmpul electric axial $\bar{E} = (0,\ 0,\ E_z)$ iar cîmpul magnetic transversal $\bar{H} = (H_x,\ H_y,\ 0)$ unde componentele H_x, H_y, E_z se presupun independente de z. Din ecuațiile (1) și (2) rezultă că în fiecare domeniu plan D_k avem

$$\Delta E_z = \sigma_k \mu_k \dot{E}_z \tag{3}$$

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{\mu_k}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad \dot{H}_y = \frac{1}{\mu_k}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{4}$$

unde $\Delta = \Delta_{x,y}$ reprezintă laplacianul bidimensional exprimat în coordonatele $(x,\ y)$. De asemenea, ținînd seama că secțiunea D_k a conductorului k este parcursă de curentul total i_k putem scrie

$$i_k(t) = \int_{D_k} \sigma_k E_z \, \mathrm{d}A\,, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ m \tag{5}$$

În dielectricul dintre conductoare presupus neîncărcat cu sarcini și de permeabilitate μ_0, ecuațiile cîmpului electromagnetic cvasistaționar sînt

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_0 \dot{\bar{H}} \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = 0 \tag{7}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \tag{8}$$

Considerînd ca mai sus $\bar{H} = (H_x,\ H_y,\ 0)$ cu H_x, H_y și E_z independente de z, notăm

$$E_0 = E_z - u \tag{9}$$

unde u este căderea de potenţial pe unitatea de lungime evaluată în lungul conductoarelor. Alegînd originea potenţialului pe ecranul perfect conductor, din (6), (7) şi (8) se obţin ecuaţiile :

$$\Delta E_0 = 0 \tag{10}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_0}{\partial y}, \quad \dot{H}_y = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_0}{\partial x} \tag{11}$$

cu condiţiile de trecere :

$$\begin{cases} E_z - E_0/_{S_k} = u_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots m \\ \dfrac{1}{\mu_k}\dfrac{\partial E_2}{\partial n} - \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial E_0}{\partial n}\Big/_{S_k} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

şi condiţia la limită :

$$E_0/_{S_0} = 0 \tag{13}$$

unde $u_k(t)$ sînt valorile constante (independente de x, y) ale căderilor de potenţial de-a lungul conductoarelor evaluate pe suprafeţele echipotenţiale S_k ale acestora, iar n este normala orientată spre exteriorul frontierei S_k.

Observăm că ecuaţiile (3), (5) şi (10) împreună cu (12) şi (13) furnizează în principiu (după rezolvarea lor prin metoda transformatei Laplace în condiţii iniţiale de cîmp nule) o caracterizare de tip multipol a sistemului de conductoare considerat, prin intermediul unor relaţii liniare de forma

$$i_k(s) = \sum_{l=1}^{m} Y_{kl}(s)\, u_l(s), \; k = 1, \; 2, \ldots m$$

Această concluzie este în acord cu rezultatele generale obţinute în [4], dar obţinerea expresiilor explicite ale admitanţelor operaţionale $Y_{kl}(s)$ este posibilă numai în cazuri particulare, datorită dificultăţilor implicate de rezolvarea problemei corespunzătoare de cîmp.

Avînd în vedere această situaţie, în continuare vom considera o procedură de tip Galerkin pe baza căreia pot fi obţinute direct aproximaţii finit-dimensionale ale relaţiilor (14).

3. Calculul cîmpului electromagnetic cvasistaţionar şi a imitanţelor operaţionale printr-o procedură de tip Galerkin

Ne interesează problema de cîmp formulată prin (3), (5), (10) cu condiţiile de trecere (12) şi condiţia la limită (13). Presupunem că $\mu_k = \mu_0$, $\sigma_k = \sigma$ şi prin analogie cu (9), avînd în vedere obţinerea unor con-

diții de trecere omogene notăm :

$$E_k = E_z - u_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots m$$

unde indicele k se referă la cîmpul pe secțiunea D_k a conductorului k. Aplicînd transformata Laplace ecuațiilor (3) și (10) în condiții inițiale nule și notînd $\lambda = a^2 \sigma \mu_0 s$, unde a este o dimensiune geometrică caracteristică a sistemului de conductoare, ajungem la concluzia că în fiecare domeniu plan D_k ocupat de conductoare, precum și în domeniul exterior D_0 ocupat de dielectric sînt respectiv satisfăcute ecuațiile

$$\begin{cases} \Delta E_k = \dfrac{\lambda}{a^2}(E_k + u_y(s)) \\ \Delta E_0 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Datorită ipotezei $\mu_k = \mu_0$ și a notațiilor (15) și

$$E \equiv E(x, y, s) = \begin{cases} E_k(x, y, s), (x, y) \in D_k \\ E_0(x, y, s), (x, y) \in D_0 \end{cases} \tag{17}$$

datorită cărora ecuațiile (16) se scriu sub forma

$$\begin{cases} \Delta E(x, y, s) = \dfrac{\lambda}{a^2}(E(x, y, s) + u_k(s)), (x, y) \in D_y \\ \Delta E(x, y, s) = 0 \qquad\qquad (x, y) \in D_0 \end{cases} \tag{18}$$

condițiile (12) se reduc la condițiile de trecere continuă a funcției $E \equiv E(x, y, s)$ precum și a primei sale derivate după normală pe contururile S_k ale conductoarelor. Condiția la limită (13) se poate scrie sub forma

$$E(x, y, s)\,|_{(x,y) \in S_0} = 0 \tag{18'}$$

Avînd în vedere aceste constatări căutăm o aproximație $E^* \equiv E^*(x, y, s)$ a soluției problemei de cîmp (18), (18') de tipul

$$E^* \equiv E^*(x, y, s) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} e_i(x, y)\, \xi_i(s) \equiv -\lambda e^T(x, y) \tag{19}$$

unde funcțiile de bază $e(x, y)$ sînt liniar independente, netede și satisfac condițiile

$$e_i(x, y)\,|_{(x,y) \in S_0} = 0 \tag{19'}$$

iar $\xi(s)$ sînt coeficienţi încă nedeterminaţi (prin $\xi(s)$ şi $e \equiv e(x, y)$ am notat vectorii n-dimensionali de componente $\xi_i(s)$ şi respectiv $e_i = e_i(s,y)$ iar indicele superior T arată transpunerea). Aproximaţia (19) satisface condiţiile de trecere pe S_k precum şi condiţia la limită (18') oricare ar fi $\xi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Avînd în vedere determinarea vectorului $\xi_i(s)$ al coeficienţilor printr-o procedură de tip Galerkin [5], [6] definim reziduurile ecuaţiilor (18) în raport cu aproximaţia $E^* = E^*(x, y, s)$ prin

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \Delta E^* - \dfrac{\lambda}{a^2}(E^* + u_k(s)), & (x, y) \in D_k \\ \Delta E^*, & (x, y) \in D_0 \end{cases} \tag{20}$$

şi impunem condiţiile de ortogonalitate

$$\int_D \varepsilon(x, y, s) e_i(x, y)\, dA = 0, i = 1, 2, \ldots n$$

unde

$$D = \left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) \cup D_0$$

Egalităţile de mai sus se scriu vectorial sub forma

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} \varepsilon\, e\, dA + \int_{D_k} \varepsilon\, e\, dA = 0, \tag{21}$$

de unde ţinînd seama de (19) şi (20) rezultă relaţia

$$\lambda N \xi(s) = A\, \xi(s) + \sum_{k=1}^{m} b_k u_k(s) \tag{22}$$

unde N, A sînt matrici de forma $n \times n$, iar b_k sînt vectori n-dimensionali avînd expresiile

$$N = \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} e\, e^T\, dA \tag{23}$$

$$A = \int_D e \Delta\, e^T\, dA, \quad b_k = \frac{1}{a^2} \int_{D_k} e\, dA \tag{24}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de notațiile (15) și (19) relațiile (5) se scriu

$$i_k(s) = -\sigma\lambda a^2 b_k^T \xi(s) + \sigma A_k u_k(s)$$

unde A este aria secțiunii transversale D_k a conductorului k.

Observînd că σA_k este conductanța de curent continuu a conductorului k și introducînd curenții normați

$$v_k(s) = \frac{1}{\sigma A_k} i_k(s), \quad (26)$$

relațiile de mai sus se scriu sub forma

$$v_k(s) = -\lambda\delta_k b_k^T \xi(s) + u_k(s), \; k = 1, \quad 2, \ldots m \quad (27)$$

unde

$$\delta_k = \frac{a^2}{A_k}$$

Din ecuația (22) rezultă vectorul coeficienților

$$\xi(s) = (\lambda N - A)^{-1} \sum_{k=1}^{m} b_k u_k(s) \quad (28)$$

care introdus în (19) determină aproximația căutată pentru cîmpul electric $E^*(x, y, s)$. Introducînd (28) în (27), obținem o relație de forma în care

$$Y_{kl}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda\delta_k b_k^T (\lambda N - A)^{-1} b_k, & k = l \\ -\lambda\delta_k b_k^T (\lambda N - A)^{-1} b_l, & k \neq l \end{cases} \quad (29)$$

Fie pentru simplitatea interpretărilor $m = 1$ și $a^2 = A^2$. În acest caz $Y_{k1}(\lambda)$ se scrie sub forma

$$Y(\lambda) = 1 - \lambda b^T (\lambda N - A)^{-1} b \quad (30)$$

Conform cu [4], admitanța operațională este

$$Y(\lambda) = \lambda G(\lambda) = 1 + \lambda^2 C(\lambda) \quad (31)$$

unde $G(\lambda)$ este imaginea conductanței tranzitorii, iar $C(\lambda)$ este imaginea capacității tranzitorii a elementului de circuit considerat. Reamintim că $\lambda = \sigma\mu\, a^2 s$. În cazul nostru din (31) folosind (30) rezultă

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - b^T (\lambda N - A)^{-1} b$$

$$C(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} b^T (\lambda N - A)^{-1} b \quad (32)$$

de unde, conductanţa şi capacitatea tranzitorie pot fi calculate direct prin inversare. Mai precis, fie

$$p(\lambda) = \det\ (\lambda N - A)$$

unde presupunem că matricea N este nesingulară, iar $p(\lambda)$ are rădăcini distincte $\lambda_1, \ldots \lambda_n$.

Avem

$$(\lambda N - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda N - A)}{p(\lambda)} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda N - A)}{\det N \cdot \det(\lambda I - N^{-1}A)} =$$

$$= \frac{C(\lambda)}{\det N \prod_j (\lambda - \lambda_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\lambda - \lambda_i}$$

în care

$$C_i = \frac{C(\lambda_i)}{\det N \prod_{j \neq 1} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Deci

$$b^T(\lambda N - A)^{-1} b = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^T C_i b}{\lambda - \lambda_i}$$

iar

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\lambda - \lambda_i}$$

şi

$$g(t^*) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e^{\lambda_i t^*}$$

în care t^* este timpul normat în raport cu constanta de timp interioară $\tau = \sigma \mu_0 a^2$.

Din relaţia (27) avem

$$u_k(s) = \lambda \delta_k b_k^T \xi(s) + v_k(s) \tag{33}$$

care introdus în (22) conduce la

$$\lambda N \xi(s) = A\xi(s) + \lambda \sum_{k=1}^{m} \delta_k b_k b_k^T \xi(s) + \sum_{k=1}^{m} b_k v_k$$

sau

$$\lambda \bar{N} \xi(s) = A\,\xi(s) + \sum_{k=1}^{m} b_k v_k(s) \tag{34}$$

în care

$$\bar{N} = N - \sum_{k=1}^{m} \delta_k b_k b_k^T$$

La fel ca mai sus din (34) putem explicita vectorul coeficienților

$$\xi(s) = (\lambda \bar{N} - A)^{-1} \sum_{k=}^{m} b_k v_k(s)$$

care introdus în (33) determină caracterizarea sistemului de conductoare prin intermediul impedanțelor operaționale $Z_{kl}(\lambda)$:

$$Z_{kl}(\lambda) = \begin{cases} 1 + \lambda \delta_k b_k^T (\lambda \bar{N} - A)^{-1} b_k, & k = l \\ \lambda \delta_k b_k^T (\lambda \bar{N} - A)^{-1} b_l, & k \neq l \end{cases} \tag{35}$$

În particular, dacă $m = 1$ și $a^2 = A^2$

$$Z(\lambda) = 1 + \lambda b^T (\lambda \bar{N} - A)^{-1} b \tag{36}$$

Conform cu [4], presupunînd inductivitatea exterioară $l_e = 0$, impedanța operațională a elementului de circuit considerat este

$$Z(\lambda) = \lambda R(\lambda) = 1 + \lambda^2 L(\lambda) \tag{37}$$

În cazul nostru din (37) folosind (36) rezultă

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + b^T (\lambda \bar{N} - A)^{-1} b$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{\lambda} b^T (\lambda \bar{N} - A)^{-1} b \tag{38}$$

de unde rezistența și inductivitatea tranzitorie pot fi calculate prin inversare. Tehnica de inversare utilizată aici a fost folosită și în [7] pentru aproximațiile finit dimensionale ale imitanțelor operaționale rezultate prin trunchierea seriilor obținute prin rezolvarea exactă a problemei de cîmp.

4. Exemplu numeric

Considerăm sistemul format dintr-o bară de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile $2a$, $2b$ ($b \geqslant a$), parcursă de curentul $i(t)$, precum și din două ecrane perfect conductoare dispuse paralel cu bara, de o parte și de alta a ei, la distanțele $d_1 = d_2 = d - a$, $b \geqslant d$. (O configurație simi-

lară a fost studiată în [8]. În ipotezele din [8] privind repartiția cîmpului și avînd în vedere ilustrarea clară a posibilităților oferite de metoda propusă, alegem familia de funcții de bază ortogonale

$$e_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{2d}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n + 1 \tag{39}$$

unde am presupus că originea sistemului de coordonate se află pe ecranul din stînga. (Evident, este satisfăcută condiția (19'), adică $e_k(0) = e_k(2d) = 0$). Utilizînd formulele (23) și (24) pentru $m = 1$ (un singur conductor), elementele N_{ij}, A_{ij} și b_i ale matricilor N, A și respectiv ale vectorului $b = b_1$ sînt

$$N_{ij} = \frac{1}{a^2} \int_{d-a}^{d+a} e_i(x) e_j(x)\, \mathrm{d}x \tag{23'}$$

$$A_{ij} = \int_0^{2d} e_i(x)\, \Delta e_j(x)\, \mathrm{d}x, \quad b_i = \frac{1}{a^2} \int_{d-a}^{d+a} e_i(x)\, \mathrm{d}x \tag{24'}$$

unde

$$\Delta e_k(x) = \frac{d^2 e_k(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\left(\frac{k\pi}{2d}\right) e_k(x).$$

Presupunînd, pentru simplitate, că $d = a$ (ceea ce corespunde anulării inductivității exterioare l_{ext} a sistemului considerat), matricile N și A rezultă diagonale iar componentele de indice par ale lui b se anulează, mai precis avem

$$N_{ii} = \frac{2}{a}, \quad A_{ii} = -\frac{i^2\pi^2}{2a}, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\,\pi a}.$$

Utilizînd acum relația (32), obținem direct imaginea conductanței tranzitorii sub forma

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{b_i^2}{\lambda N_{ii} - A_{ii}} = \frac{1}{\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{2}{\nu_k^2}}{\lambda + \nu_k^2} \tag{32'}$$

unde

$$\nu_k^2 = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}.$$

Expresia rezultată mai sus pentru $G(\lambda)$ coincide cu suma primilor n termeni ai expresiei exacte calculate în [8] pentru $l_{ext} = 0$, prin rezolvarea problemei corespunzătoare de cîmp (vezi formulele (6.37), (4.27) din [8] în care, cu notaţiile de acolo, $m \to \infty$). Această observaţie demonstrează convergenţa metodei Galerkin propusă în lucrare, evidenţiind totodată simplitate şi caracterul ei constructiv. Analiza cazului general $d = a$ ($l_{ext} \neq 0$) inclusiv pentru alte alegeri ale funcţiilor de bază decît în (39), conduce la concluzii similare.

5. Concluzii

În lucrare s-au stabilit ecuaţiile cîmpului electromagnetic cvasistaţionar al unui sistem de conductoare paralele parcurse de curenţi de aducţie variabili în timp. De asemenea, s-a propus o metodă de tip Galerkin pentru calculul aproximativ al cîmpului electromagnetic cvasistaţionar precum şi al imitanţelor operaţionale ale sistemului de conductoare considerat ca multipol în raport cu curenţii şi căderile de potenţial pe unitatea de lungime evaluate pe periferia conductoarelor.

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Timotin*, St. cerc. energ. electr. Vol. 17, nr. 1, 1967.
2. *C. I. Mocanu*, Teoria cîmpului electromagnetic E.D.P., 1981
3. *A. Ţugulea, C. Fluerăşu*, Rev. Roum. Sci., Techn. Electrotechn. Energ., Vol. 14, nr. 3, 1969.
4. *R. Răduleţ, Al. Timotin, A. Ţugulea*, St. cerc. energ. electr. Vol. 16, nr. 4, 1966.
5. *S. G. Mihlin*, Variaţionnîe metodî v matematiceskoi fizike, Nauka, Moskva, 1970.
6. *R. S. Varga*, Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis, SIAM, Philadelphia, Pe, 1971
7. *Ch. Popeea*, Bul. I.P.B., Seria Electrotehnică, vol. XLII, nr. 3, 1980.
8. *A. Ţugulea*, St. cerc. energ. electr. Vol. 22, nr. 1, 1972.

Computation of the Quasistationary Electromagnetic Field of a System of Parallel Conductors

The paper deals with the construction of the equations describing the quasistationary electromagnetic field generated by a system of parallel conductors carrying time — dependent currents. It is proved that the system under consideration can be characterized as a multiport, in terms of a set of linear relations relating the currents and the voltage drops on unit length along the conductors. Approximate expressions for the corresponding immitances are obtained by using a Galerkin — type method.

C. Z.: 621.372
537.311

ALGORITM ȘI PROGRAM DE ANALIZA A CIRCUITELOR ELECTRICE REZISTIVE NERECIPROCE COMPLEXE

M. IORDACHE *

Lucrarea prezintă un algoritm și un program complet de analiză a circuitelor electrice rezistive nereciproce complexe, bazate pe metoda hibridă de analiză a acestor circuite, expusă în [1].

Circuitele studiate pot fi liniare sau neliniare. Circuitele electrice rezistive neliniare pot conține atît rezistoare neliniare controlate în tensiune (c.u.) cît și rezistoare neliniare controlate în curent (c.i.). Calculul circuitelor electrice rezistive neliniare se face prin metoda Katzenelson [1, 2], în cazul în care caracteristicile $i-u$ ($u-i$) ale rezistoarelor neliniare c.u. (c.i.) sînt aproximate prin segmente de dreaptă. T.e.m. ale surselor independente de tensiune și curenții surselor independente de curent pot fi constante sau variabile în timp.

1. Introducere

Odată cu utilizarea pe scară largă a calculatoarelor electronice în analiza, sinteza și proiectarea circuitelor electrice a apărut necesitatea elaborării unor metode de analiză noi, specifice analizei pe calculator, metode cu grad înalt de generalitate, capabile să permită calculul circuitelor în orice regim de funcționare. Se știe [2, 3], că aproape toate regimurile de funcționare a circuitelor electrice liniare sau neliniare, se pot analiza, pe calculator, cu metodele utilizate în calculul circuitelor electrice, rezistive, prin folosirea unor scheme echivalente adecvate, specifice fiecărui element de circuit. De aici, importanța practică deosebită a metodelor de analiză a circuitelor electrice rezistive.

Circuitul analizat, conex sau nu, poate conține : atît rezistoare neliniare c.u. cît și rezistoare neliniare c.i., toate cele patru tipuri de surse comandate diport, liniare sau neliniare, surse independente de tensiune sau de curent, constante sau variabile în timp, rezistoare liniare, nulori, giratoare, amplificatoare operaționale și orice element de circuit multipol sau multiport care are o schemă echivalentă cu elemente de circuit dipolare și surse comandate.

Caracteristicile $i-u$ ($u-i$) ale rezistoarelor neliniare c.u. (c.i.) se aproximează prin segmente de dreaptă. Dacă numărul punctelor determinate experimental al caracteristicilor elementelor neliniare este redus și se dorește o aproximare mai exactă a acestora, se poate folosi una din

* Șef lucrări dr. ing., Catedra Electrotehnică

metodele mai exacte de interpolare cum sînt : metoda funcţiilor spline, metoda funcţiilor rampă rotunjite sau metoda de interpolare bazată pe proceduri locale [4].

Pentru analiza circuitelor rezistive neliniare se foloseşte metoda hibridă de analiză, prezentată în [1], care utilizează, pentru rezolvarea sistemului algebric neliniar astfel obţinut, algoritmul lui Katzenelson [1, 2]. Algoritmul lui Katzenelson are, faţă de majoritatea algoritmilor de rezolvare a sistemelor algebrice neliniare, marele avantaj că în condiţii nu prea restrictive [5], este totdeauna convergent. Şi în plus, dacă caracteristicile rezistoarelor neliniare sînt liniarizate pe porţiuni, forma ecuaţiilor specifice algoritmului lui Katzenelson este simplă.

În cazul cînd circuitul studiat este liniar, pentru analiza sa, se foloseşte metoda curenţilor rezistoarelor coarde sau metoda tensiunilor rezistoarelor ramuri [6]. Programul de calcul este astfel conceput încît permite selectarea metodei de calcul a circuitelor liniare care conduce la numărul cel mai mic de ecuaţii independente.

Programul de analiză a circuitelor electrice rezistive nereciproce complexe, denumit ACEKT (Analiza Circuitelor Electrice cu algoritmul Katzenelson), este scris în limbaj FORTRAN IV şi este depus pe discul AD4 al calculatorului FELIX C-512 din cadrul Centrului de Calcul al Institutului Politehnic Bucureşti. În paragraful 3 se prezintă structura cartelelor de comandă necesare apelării acestui program.

2. Descrierea algoritmului

Deoarece, conform definiţiei [7], arborele normal comun (ANC) (arborescenţa normală comună (ARNC), pentru circuitele neconexe) trebuie să conţină anumite tipuri de elemente de circuit, elementele circuitului se împart în cinci tipuri, numerotate : 1, 2, 3, 4 şi 5.

Tipul 1 de elemente conţine sursele ideale independente de tensiune (SIIT — E). În structura elementelor de tipul 2 intră rezistoarele neliniare c.u. (Ru), tipul 3 conţine rezistoarele liniare (R), tipul 4 cuprinde rezistoarele neliniare c.i. (Ri), iar în mulţimea elementelor de tipul 5 sînt incluse sursele ideale independente de curent (SIIC-J).

ANC (ARNC) trebuie să conţină toate laturile corespunzătoare porţilor comandate (E_c) ale surselor de tensiune comandate şi toate laturile corespunzătoare porţilor de comandă (J_c) ale surselor de curent comandate în curent şi nu trebuie să conţină nici una din laturile comandate (J_c) ale surselor de curent comandate şi nici una din laturile de comandă (E_c) ale surselor de tensiune comandate în tensiune.

Pentru a facilita introducerea datelor pe calculator şi pentru simplificarea determinării ANC (ARNC), laturile comandate şi de comandă ale celor patru tipuri de surse comandate diport li se asociază, la început, numerele din tabelul 1.

Dacă latura comandată a sursei $e_c(i_c)$ are, ca tip, numărul 15, latura de comandă va avea, ca tip, numărul 105 etc.

Deoarece sursele comandate sînt echivalente cu rezistoare liniare sau neliniare, ce ocupă poziţii diferite în cele două grafuri : de curent G^I şi de tensiune G^U [1, 7], după determinarea ANC (ARNC), aceste rezis-

Tabelul 1

Tipul sursei comandate	Laturile sursei comandate	
	Comandate	De comandă
Sursă de tensiune comandată în curent, $\hat{e}_c(i_C)$	10—29	100—119
Sursă de tensiune comandată în tensiune, $\hat{e}_c(u_C)$	30—49	300—319
Sursă de curent comandată în tensiune, $\hat{j}_c(u_C)$	50—69	500—519
Sursă de curent comandată în curent, $\hat{j}_c(i_C)$	70—89	700—719

toare se includ în mulțimea elementelor de tipul 3, dacă sînt liniare, în mulțimea elementelor de tipul 2, dacă sînt neliniare c.u. și în cea a elementelor de tipul 4 dacă sînt neliniare c.i.

Pasul 1. Se determină un ANC (o ARNC) și matricele incidențelor esențiale (MIE) Λ, β corespunzătoare grafurilor G^I și G^U. ANC (ARNC) și MIE se determină cu metoda prezentată în [7], metodă ce verifică și condițiile din teorema de existență a unui ANC (ARNC). Programul ACEKZ indică, printr-un mesaj, care din cerințele teoremei de existență nu sînt satisfăcute. De asemenea, MIE sînt astfel determinate încît prima coloană a acestora (începînd cu elementul al doilea) conține numerele de ordine, date inițial, ale laturilor ramuri (din arbore), iar prima linie (începînd cu elementul al doilea) ordinea laturilor coarde (din coarbore).

Pasul 2. Se calculează matricea hibridă H corespunzătoare părții liniare a circuitului. Matricea H are, conform [1], expresia :

$$H = \begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ac} \\ H_{ca} & H_{cc} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

unde :

$$H_{aa} = -\Lambda_{RuR} R^{-1} \beta^T_{RuR} \in \mathbb{R}^{n_{Rua},\, n_{Rua}} \tag{2a}$$

$$H_{ac} = -\Lambda_{Ru\,Ri} + \Lambda_{RuR} R^{-1} \beta^T_{RR} R_a \Lambda_{RRi} \in \mathbb{R}^{n_{Rua},\, n_{Ric}} \tag{2b}$$

$$H_{ca} = \beta^T_{Ru\,Ri} + \beta^T_{RRi} G^{-1} \Lambda_{RR} G_c \beta^T_{RuR} \in \mathbb{R}^{n_{Ric},\, n_{Rua}} \tag{2c}$$

$$H_{cc} = -\beta^T_{RRi} G^{-1} \Lambda_{RRi} \in \mathbb{R}^{n_{Ric},\, n_{Ric}}, \tag{2d}$$

în care :

$$R = R_c + \beta^T_{RRa} \Lambda_{RR} \in \mathbb{R}^{n_{Rc},\, n_{Rc}} \tag{3a}$$

$$G = G_a + \Lambda_{RR} G_c \beta^T_{RR} \in \mathbb{R}^{n_{Ra} \times n_{Ra}}, \tag{3b}$$

$n_{Rua}(n_{Ra})$ și n_{Ric} (n_{Rc}) reprezintă numărul rezistoarelor neliniare c.u. liniare) ramuri și respectiv numărul rezistoarelor neliniare c.i. (liniare)

coarde. Celelalte mărimi din relaţiile (2) şi (3) au semnificaţiile prezentate în [1].

Dacă ANC (ARNC) nu conţine nici un rezistor neliniar c.u. şi coarborele nu conţine nici un rezistor neliniar c.i., algoritmul continuă cu pasul 11, altfel cu pasul următor.

Pasul 3. Se calculează vectorii sursă S_{ua} şi S_{uc} [1], cu relaţiile :

$$S_{ua} = \Lambda_{Ru} R^{-1} \beta_{ER}^T u_E + (-\Lambda_{RuJ} + \Lambda_{RuR} R^{-1} \beta_{RR}^T R_a \Lambda_{RJ}) i_J \in \mathbb{R}^{n_{Rua}}, \quad (4a)$$

$$S_{ic} = (\beta_{ERi}^T - \beta_{RRi}^T G^{-1} \Lambda_{RR} G_c \beta_{ER}^T) u_E - \beta_{RRi}^T G^{-1} \Lambda_{RJ} i_J \in \mathbb{R}^{n_{Ric}}, \quad (4b)$$

unde, de exemplu, $u_E \in \mathbb{R}^{n_E}(i_J \quad \mathbb{R}^{n_J})$ este vectorul tensiunilor (curenţilor) SIIT (SIIC).

Pasul 4. Selectînd ca variabile independente tensiunile rezistoarelor neliniare c.u. ramuri u_{ua} şi curenţii rezistoarelor neliniare c.i. coarde i_{ic} şi aproximînd caracteristicile $i-u$ $(u-i)$ prin segmente de dreaptă se formează ecuaţiile hibride, [1], ale circuitului corespunzătoare combinaţiei de segmente s

$$G_{ua}(s) \cdot u_{ua} + I_{ua}(s) + \Lambda_{RuRu}(G_{uc}(s) \cdot u_{uc} + I(s)) - H_{aa} u_{ua} - H_{ac} i_{ic} - S_{ua} = 0 \quad (5a)$$

$$-H_{ca} u_{ua} + R_{ic}(s) \cdot i_{ic} + E_{ic}(s) - \beta_{RiRi}^T (R_{ia}(s) \cdot i_{ia} + E_{ia}(s)) - H_{cc} i_{ic} - S_{ic} = 0 \quad (5b)$$

$$i_{ia} = -\Lambda_{RiRi} i_{ic} - \Lambda_{RiJ} i_J \quad (5c)$$

$$u_{uc} = \beta_{ERu}^T u_E + \beta_{RuRu}^T u_{ua}. \quad (5d)$$

Fie $s^{(k)}$ o combinaţie de segmente curentă. Notînd :

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} u_{ua}(s^{(k)}) \\ i_{ic}(s^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} G_{ua}(s^{(k)}) + \Lambda_{RuRu} G_{uc}(s^{(k)}) \beta_{RuRu}^T - H_{aa} & -H_{ac} \\ -H_{ca} & R_{ic}(s^{(k)}) + \beta_{RiRi}^T R_{ba}(s^{(k)}) \Lambda_{RiRi} - H_{cc} \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{ua}(s^{(k)}) + \Lambda_{RuRu} I_{uc}(s^{(k)}) + \Lambda_{RuRu} G_{uc}(s^{(k)}) \beta_{ERu}^T u_E \\ E_{ic}(s^{(k)}) + \beta_{RiR}^T E_{ia}(s^{(k)}) + \beta_{RiRia}^T R(s^{(k)}) \Lambda_{RiJ} i_J \end{bmatrix} \quad (6c)$$

$$y = \begin{bmatrix} S_{ua} \\ S_{ic} \end{bmatrix}, \quad (6d)$$

ecuaţiile (5) devin :

$$A^{(k)} x^{(k)} + B^{(k)} = y \quad (7a)$$

$$x^-(s^{(k)}) \leqslant x \leqslant x^+(s^{(k)}), \quad (7b)$$

Ecuaţiile (7) permit aplicarea algoritmului lui Katzenelson, [1, 2], pentru soluţionarea lor.

Pasul 5. Se aleg valori iniţiale (de început) pentru variabilele independente u_{ua} şi i_{ic}. Fie acestea : $u_{ua}^{(0)}$ şi $i_{ic}^{(0)}$.

Pasul 6. Se calculează, cu relaţiile (5c) şi (5d), mărimile $i_{ia}^{(0)}$ şi $u_{uc}^{(0)}$.

Pasul 7. Se determină mărimile : $G_{ua}(s^{(0)})$, $I_{ua}(s^{(0)})$, $G_{uc}(s^{(0)})$, $I_{uc}(s^{(0)})$, $R_{ia}(s^{(0)})$, $E_{ia}(s^{(0)})$, $R_{ic}(s^{(0)})$ şi $E_{ic}(s^{(0)})$, corespunzătoare combinaţiei de segmente $s^{(0)}$.

Pasul 8. Se calculează, cu relaţiile (6b) şi (6c), matricea $A^{(0)}$ şi vectorul $B^{(0)}$. Înlocuind mărimile : $x^{(0)}$, $A^{(0)}$ şi $B^{(0)}$ în membrul stîng al ecuaţiei (7a) obţinem vectorul $y^{(0)}$.

Pasul 9. Se testează dacă

$$\frac{\|y^{(0)}-y\|}{\|y\|} \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

unde : $\|\cdot\|$ reprezintă, de exemplu, norma euclidiană, iar ε este valoarea erorii impuse.

Dacă relaţia (8) nu este satisfăcută, procesul continuă cu pasul următor. În caz contrar, valoarea vectorului $x^{(0)}$ reprezintă soluţia exactă a sistemului (7) şi se trece la pasul 11.

Pasul 10. Fie $\hat{x}^{(0)}$ soluţia exactă a ecuaţiei (7a), pentru combinaţia de segmente $s^{(0)}$, adică

$$A^{(0)}\hat{x}^{(0)} + B^{(0)} = y. \tag{9}$$

Pentru fiecare rezistor neliniar j, a cărui tensiune sau al cărui curent face parte din setul de variabile independente considerat, se calculează

$$\tilde{x}_j^{(0)}(\lambda) = x_j^+(s^{(0)}) \text{ dacă } \hat{x}_j^{(0)} > x_j^{(0)} \tag{10a}$$

$$\hat{x}_j^{(0)}(\lambda) = x_j^-(s^{(0)}) \text{ dacă } \hat{x}_j^{(0)} < x_j^{(0)}, \tag{10b}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n, \; n = n_{Rua} + n_{Ric},$$

unde : $\lambda \in [0, 1]$, iar $x_j^-(s^{(0)})$ şi $x_j^+(s^{(0)})$ este marginea inferioară şi respectiv superioară a segmentului $s^{(0)}$ corespunzătoare rezistorului neliniar j, [2].

Se determină :

$$\lambda_j^{(0)} = \frac{x_j^-(s^{(0)} - x_j^{(0)}}{\hat{x}_j^{(0)} - x_j^{(0)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

unde indicele superior $+$ se ia dacă $\hat{x}_j^{(0)} > x_j^{(0)}$ şi indicele superior $-$ se ia dacă $\hat{x}_j^{(0)} < x_j^{(0)}$.

Valoarea $\lambda_j^{(0)}$, calculată cu formula (11), reprezintă valoarea lui λ, unde linia dreaptă descrisă de ecuaţia

$$\tilde{x}_j^{(0)}(\lambda) = \lambda\hat{x}_j^{(0)} + (1 - \lambda)x_j^{(0)} \tag{12}$$

traversează frontiera al cărui segment $s_j^{(0)}$ al rezistorului neliniar R_j corespunde combinației de segmente $s^{(0)}$.

Este evident că valoarea lui λ unde linia dreaptă (12) traversează pentru prima dată frontiera este

$$\lambda(s^{(0)}) = \min \{\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}\}. \tag{13}$$

Punctul $M(s^{(0)})$ unde linia dreaptă definită de ecuația

$$x^{(0)}(\lambda) = \lambda \hat{x}^{(0)} + (1 - \lambda)x^{(0)}, \tag{14}$$

intersectează frontiera hipercubului definit de combinația de segmente $s^{(0)}$, este dat de relația

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)}(\lambda) \stackrel{d}{=} \tilde{x}^{(0)}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda(s^{(0)})}. \tag{15}$$

Presupunînd că $M(s^{(0)})$ nu este un „colț" (punct unde se întîlnesc, la trecerea de la o combinație de segmente la una vecină, două sau mai multe curbe $i-u$ $(u-i)$ ale rezistoarelor neliniare), atunci ecuația (15) este folosită pentru a defini următoarea combinație de segmente $s^{(1)}$. Mai mult, $x^{(1)} = \tilde{x}^{(1)}$ devine punct inițial pentru următoarea iterație

$$y^{(1)} = A^{(1)}x^{(1)} + B^{(1)} \tag{16a}$$

$$\tilde{x}(\lambda)^{(1)} = x^{(1)} + \lambda A^{(1)-1}(y - y^{(1)}). \tag{16b}$$

Substituind $x^{(0)}$ și $y^{(0)}$ cu $x^{(1)}$ și $y^{(1)}$ procesul iterativ se reia de la pasul 9.

Convergența algoritmului depinde evident de ipoteza ca $\lambda_j > 0$ la fiecare iterație și pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît la fiecare iterație să se adauge un segment de lungime finită în direcția $y^{(0)} \to y$ (de la $y^{(0)}$ la $y^{(1)}$, apoi de la $y^{(1)}$ la $y^{(2)}$ etc., pînă cînd se ajunge la iterația n, unde $y^{(n)} = y$). Se demonstrează, [5], că dacă aplicația

$$f(x) \stackrel{d}{=} A(x),\ x + B(x) \tag{17}$$

este o aplicație bijectivă, algoritmul lui Katzenelson este convergent întotdeauna într-un număr finit de iterații. Dacă $f(x)$ nu este bijectivă (adică există $\lambda_j < 0$) algoritmul lui Katzenelson, în general, nu converge. Dacă însă, determinantul matricei $A^{(k)}$ are același semn pentru toate combinațiile de segmente, se garantează, [5], că algoritmul lui Katzenelson este convergent.

Evitarea „colțurilor" se face printr-o modificare incrementală a valorilor inițiale ale mărimilor x.

Pasul 11. Cu formulele expuse în [1], se determină toate celelalte valori ale mărimilor circuitului analizat, în funcție de: vectorul variabilelor independente x, parametrii circuitului și vectorul mărimilor de excitație (intrare) $z = [u_E^T\ i_J^T]$.

În cazul în care t.e.m. ale SIIT și curenții SIIC sînt variabile în timp, la pasul 1 se aleg : pasul în timp h și momentul inițial t_0 de la care începe analiza circuitului studiat, iar după pasul 11 urmează pasul 12 în care se calculează $t_n = t_{n-1} + h$ (n fiind indicele momentului de timp curent, la începutul $n = 0$) și dacă t_n este mai mare decît limita superioară de variație a timpului, procesul de calcul se oprește, altfel se reia cu pasul 3

3. Descrierea programului de calcul

Dimensiunile tablourilor folosite în program au fost luate în funcție de numărul maxim de laturi și numărul maxim de noduri pe care le poate avea circuitul studiat și în funcție de numărul rezistoarelor neliniare și a surselor independente variabile în timp, prezente în structura circuitului. În cazul prezentului program sînt admise : 50 de laturi, 20 de noduri, 10 rezistoare neliniare și 10 surse independente variabile în timp. Fiecare caracteristică $i-u$ ($u-i$) a fiecărui rezistor neliniar c.u. (c.i.) și fiecare dependență $e-t$ ($j-t$) a fiecărei surse independente de tensiune (curent) se aproximează prin cîte 20 de puncte.

Evident, dacă partiția de memorie a calculatorului, pusă la dispoziția utilizatorului, este mai mare decît 96 ko (memorie ocupată, în dublă precizie, de cel mai lung segment al prezentului program), dimensiunile tablourilor și implicit mărimea circuitului analizat vor crește corespunzător.

Structura arborelui corespunzător celor 11 segmente este reprezentată în figura 1.

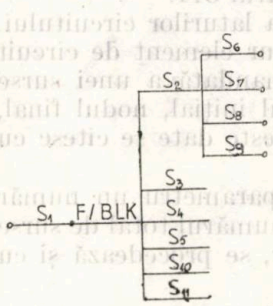


Fig. 1 — Structura arborelui celor unsprezece segmente

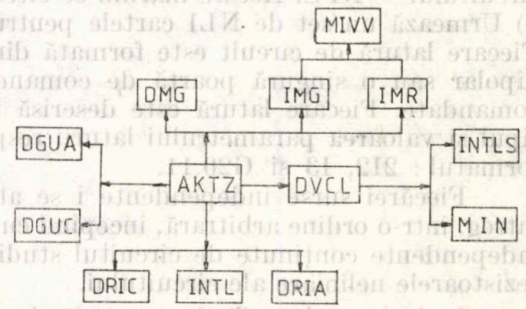


Fig. 2 — Structura pe subrutine a segmentului S3

Segmentele S_1, S_2, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9 sînt descrise în [8, 9]. Subrutinele DCTE și SVTC, care în [9] făceau parte din segmentul S_1, în prezentul program alcătuiesc segmentul S_{10} și respectiv S_{11}.

În figura 2 este descrisă structura segmentului S_3 cu subrutinele aferente și conexiunile dintre ele.

Segmentul S_3 cuprinde subrutinele :

— AKTZ — rezolvă, cu algoritmul lui Katzenelson, descris în paragraful 2, sistemul algebric neliniar (7) ;

— DMG — determină cu formula (3b) matricea G ;

— IMR (IMG) — inversează matricea R (G) ;

— DGUA (DGUC) — determină, la fiecare iterație, matricea $G_{ua}(G_{uc})$ și vectorul $I_{ua}(I_{uc})$;
— DRIA (DRIC) — calculează valorile curente ale matricei $R_{ia}(R_{ic})$ și ale vectorului E_{ia} (E_{ic});
— MIVV — inversează o matrice pătrată nesingulară;
— INTL — interpolează prin segmente de dreaptă o curbă dată prin puncte, determinînd ordonata la origine și panta segmentului corespunzător valorii curente a variabilei independente;
— DVCL — calculează valoarea, la fiecare iterație (conform relațiilor (11) și (13)), a parametrului $\lambda(s^{(k)})$;
— MIN — determină cel mai mic (ca valoare) termen al unui șir de numere reale;
— INTLS — interpolează liniar prin segmente de dreaptă o curbă dată prin puncte, determinînd ordonata la origine, panta și limitele (inferioară, și superioară) ale segmentului corespunzător unei valori date variabilei independente.

Programul ACEKZ este depus pe discul AD4 al calculatorului FELIX C-512 din Centrul de Calcul al Institutului Politehnic București.

Structura datelor de intrare este următoarea:
1) Prima cartelă conține: numărul maxim de iterații — ITMAX, numărul maxim de puncte prin care se dau caracteristicile rezistoarelor neliniare — NPRN, numărul pașilor în timp — NPT și pasul în timp — XHT. Aceste mărimi se citesc cu formatul: 3I3, G40.20.
2) A doua cartelă de date cuprinde: numărul inițial de laturi — NLI, numărul nodurilor circuitului — NNOD și numărul de părți separate ale circuitului — NPS. Aceste mărimi se citesc cu formatul 3I4.
3) Urmează un set de NLI cartele pentru descrierea laturilor circuitului. Fiecare latură de circuit este formată dintr-un singur element de circuit dipolar sau o singură poartă de comandă sau comandată a unei surse comandate. Fiecare latură este descrisă prin: nodul inițial, nodul final, tipul și valoarea parametrului laturii respective. Aceste date se citesc cu formatul: 2I2, I3 și G20.11.

Fiecărei surse independente i se atribuie ca parametru un număr întreg, într-o ordine arbitrară, începînd cu 1 pînă la numărul total de surse independente conținute de circuitul studiat. Similar, se procedează și cu rezistoarele neliniare ale circuitului.

La început, laturile de comandă și comandate ale surselor comandate au ca tip unul din numerele din tabelul 1 și apoi, în funcție de natura rezistoarelor prin care sînt echivalate, primesc ca tip, tipul rezistoarelor respective.
4) Se citesc coordonatele caracteristicilor surselor independente și apoi cele ale rezistoarelor neliniare. Coordonatele caracteristicilor surselor independente (rezistoarelor neliniare) sînt date în matricea SEJ (RNN), care conține pe prima linie numărul punctelor prin care sînt aproximate aceste curbe, iar pe coloane, începînd cu linia 2, sînt prezentate coordonatele, mai întîi abscisele și apoi ordonatele fiecărei caracteristici, în ordine atribuită inițial, ca parametru, surselor independente (rezistoarelor neliniare).

Prima linie a matricei SEJ (RNN) se citește cu formatul 16F5.0) apoi se citesc coloanele (începînd cu linia 2) cu formatul 4F20.10. Abscisele și ordonatele fiecărei surse independente (fiecărui rezistor neliniar,

se citesc cu formatul 4F20.10 astfel : mai întîi abscisele şi apoi, fără să se treacă la cartelă nouă, ordonatele.

5) Valorile iniţiale (de început) ale variabilelor independente se citesc cu formatul 4F20.10.

Observaţia 1

Nodurile suplimentare necesare identificării porţilor de comandă ale surselor comandate $\hat{e}_c(i_C)$, noduri ce nu apar în grafurile G^I şi G^U, nu sînt considerate în numărul total (iniţial) de noduri ale circuitului.

Regula 1

Cele două noduri asociate porţii de comandă a fiecărei surse comandate în curent se aleg astfel încît curentul de comandă să fie orientat către nodul laturii căreia îi aparţine.

Regula 2

Sensul laturilor (porţilor) comandate ale surselor de tensiune comandate în curent sau în tensiune este identic cu sensul tensiunilor la bornele porţii comandate.

Programul ACEKZ tipăreşte toate mărimile citite şi în plus furnizează utilizatorului următoarele date :

1) numărul fiecărui tip de elemente de circuit ;

2) graful de curent G^I, graful de tensiune G^U, elementele în exces, ca tip şi număr, numărul şi laturile arborelui, respectiv coarborelui şi matricele incidenţelor esenţiale Λ, β ;

3) matricea hibridă H şi vectorii sursă S_{ua} şi S_{ic} ;

4) numărul de iteraţii în care s-a găsit soluţia sistemului algebric neliniar (7) şi valoarea vectorului variabilelor independente obţinut după ultima iteraţie ;

5) timpul curent şi corespunzător timpului curent tensiunile şi curenţii laturilor grafului G^I şi respectiv G^U, sub formă de tabele de forma :

Număr latură	Nod iniţial	Nod final	Tensiunea	Curentul

Structura cartelelor de comandă necesare utilizării programului ACEKZ este

— cartela de JOB ...

— 1 ... FETCH DV : AD4, LN : UTILIMT, VN : 0, GN : 1, FN : ACEKZ
1 ... 11

— · RUN TIME : 50, NL : 50 000

— cartelele de date
1 ... 11

— · EOJ

4. Concluzii

Algoritmul de analiză hibridă a circuitelor electrice rezistive nereciproce complexe, liniare sau neliniare, prezentat în lucrare, se caracterizează printr-un înalt grad de generalitate, în sensul că permite analiza circuitelor rezistive care pot conține : atît rezistoare neliniare c.u. cît și rezistoare neliniare c.i., toate cele patru tipuri de surse comandate diport, liniare sau neliniare, surse independente de tensiune sau de curent, constante sau variabile în timp și orice element de circuit multipol sau multiport care are o schemă echivalentă cu elemente dipolare și surse comandate. Astfel de circuite electrice rezistive sînt, în general, cele mai complexe circuite rezistive întîlnite în practică.

Programul ACEKZ este astfel conceput încît dialogul utilizator-calculator este simplu, natural ceea ce determină folosirea lui chiar și de cei care sînt mai puțin inițiați în analiza circuitelor electrice.

În urma testării programului ACEKZ pe un număr mare și variat, ca structură, de circuite rezistive liniare și neliniare, s-a constatat că timpul de calcul este, în general, redus dacă condițiile de convergență ale algoritmului lui Katzenelson sînt satisfăcute. Cum majoritatea caracteristicilor dispozitivelor electronice neliniare satisfac condițiile de convergență impuse de algoritmul lui Katzenelson, programul ACEKZ se pretează foarte bine la astfel de circuite.

Fără modificări esențiale, așa cum se va arăta într-o nouă lucrare, programul ACEKZ poate fi utilizat și în analiza circuitelor electrice liniare sau neliniare în regim tranzitoriu, prin înlocuirea bobinelor și condensatoarelor cu modele echivalente discrete, specifice algoritmului de integrare folosit.

Separarea părții liniare a circuitului de cea neliniară, conduce la o economisire substanțială a timpului de calcul prin calcularea o singură dată, la începutul procesului de calcul, a termenilor din ecuațiile circuitului care depind exclusiv de elementele liniare de circuit.

BIBLIOGRAFIE

1. *M., Iordache,* Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., nr. 1, 1982, p. 27—39.

2. *L., O., Chua, M., P., Lin.* Computer-aided analysis of electronic circuits (algorithms and computational techniques) Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

3. *C., Fluerașu, M., Iordache,* Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., nr. 4, 1982, p. 399—410.

4. *M., Iordache.* Contribuții la modelarea sistemelor neliniare în regim tranzitoriu. Teză de doctorat, IPB, 1977.

5. *T., Fujisawa, E., S., Kuh, T., Ohtsuki,* IEEE trans. Circuit Theory, vol. CT-19, 1972, p.. 571—584.

6. *D., Iordache, M. Iordache, N., Voicu* E.E.A. — Electrotehnica, nr. 3, 1979.

7. *M., Iordache,* Electrotehnica, nr. 5, 1982, p. 189—194.

8. *M., Iordache, S. Chira,* Buletinul IPB nr. 2, 1982, p. 69—77.

9. *M., Iordache, M., Georgescu, N., Voicu* E.E.A. — Electrotehnica, nr. 5, 1983, p. 184—192.

Analysis Algorithm and Computing Program for Complex Nonreciprocal Electric Resistive Networks

This paper presents an analysis algorithm and a computing program for complex nonreciprocal electric resistive networks, based on the hybrid analysis method presented in [1].

The electric networks under consideration can be linear or nonlinear networks. The nonlinear resistive networks can contain both current- and voltage-controlled nonlinear resistors, constant or time-dependent independent voltage and current sources, linear resistors, nullors, gyrators, current inverters, voltage inverters and all four type of linear or nonlinear controlled sources.

The Katzenelson algorithm is used for computing nonlinear resistive networks. The i—v curve or the v—i curve of each nonlinear resistor by a piecewise-linear curve are approximated.

C.Z. : 621.3.012.8
538.55

REALIZABILITY CONDITIONS FOR NONLINEAR CONCAVE CHARACTERISTICS

F. CONSTANTINESCU *

The nonlinear concave characteristic $u = f(i)$ is synthesised with a series connection of nonlinear circuit elements. The realizability conditions for a circuit containing only a certain type of Zener diodes are given. A quantity E_0 is determined so that the characteristic can be synthesised with Zener diodes having any Zener voltage $E < E_0$.

1. The Synthesis method

The synthesis of the concave driving-point characteristics $u = f(i)$ of the nonlinear two-poles is done by means of identification methods [1]; these methods give the parameters of the nonlinear and linear circuit elements of the two-pole. Because nonlinear devices (e.g. Zener diodes) are manufactured having only certain parameters, the identification methods are especially of academic interest. A synthesis method which uses a certain type if Zener diodes is presented in [2].

In this paper the realizability conditions for nonlinear concave characteristics $u = f(i)$ synthesised with nonlinear circuit elements connected in series are presented. A quantity E_0 is shown to exist so that the characteristic can be synthesised with Zener diodes having any Zener voltage $E < E_0$.

The characteristic $u = f(i)$ is piecewise-linear (Fig. 1) and has the parameters U_k, I_k, r_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ where r_k are the dynamic resistances of the linear portions. The characteristic $u = f(i)$ is passive and locally passive [3]; in the following we shall refer to such a type of characteristic as $u = f(i)$.

We suppose that all nonlinear devices are Zener diodes with the

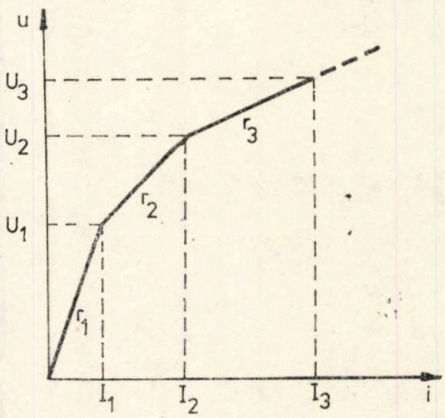


Fig. 1 The characteristic $u = f(i)$

* Assistant, Electrotechnics Dept.

parameters E (Zener voltage) and I_z (maximum current); these diodes may be connected in series but not in parallel. The nonlinear circuit element for the series extraction [2] in the case of concave characteristic $u = f(i)$ has m Zener diodes in series and is given in Fig. 2.a; its characteristic $u_e = f(i_e)$ is shown in Fig. 2. b). The maximum current through element is:

$$I_M = I_z\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{mE}{R_2} \tag{1}$$

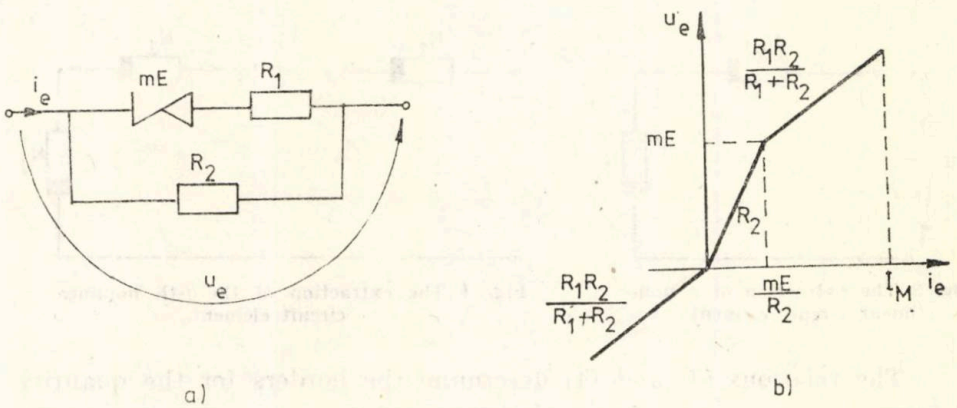


Fig. 2 The nonlinear circuit element.

The synthesis of a nonlinear characteristic $u = f(i)$ consists in n successive series extractions of nonlinear elements and therefore the resulting circuit is a series connection of n nonlinear circuit elements [2]. Realizability conditions that will be stated in this paper are valid for the domain $i \in [0, I_{max}]$ of the characteristic $u = f(i)$.

2. The realizability conditions

The extraction of the first nonlinear element is done so that the two-pole N' has a breaking point less than N, i.e. N' has no slope change in (U_1', I_1). The conditions allowing the extraction of a nonlinear element N_e from the two-pole N having the characteristic $u = f(i)$ are given by the theorem 1.

Theorem 1. The necessary and sufficient conditions in order to extract a nonlinear element N_e having the parameters m_1E, R_1, R_2, I_M from the two-pole N having the characteristic $u = f(i)$, so that the two-pole N' (Fig. 3) has a passive and local passive characteristic with a breaking point less than N are:

$$I_M \geq I_{max} \tag{2}$$

and to exist $m_1 \in \mathcal{N}$ so that:

$$r_1 - r_2 < \frac{m_1 E}{I_1} \leqslant r_1 \tag{3}$$

$$r_{n+1} > \frac{m_1 E}{I_1} - (r_1 - r_2) \tag{4}$$

where $\mathcal{N}$ is the set of natural numbers.

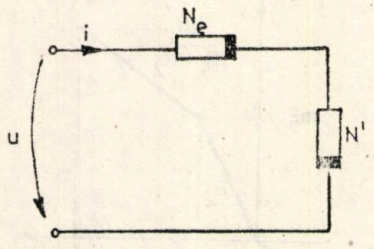


Fig. 3 The extraction of a nonlinear circuit element.

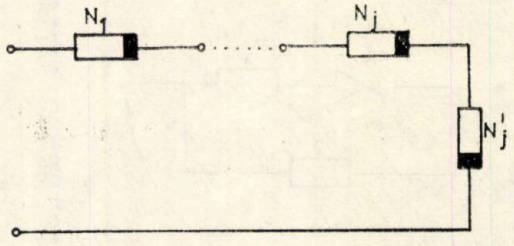


Fig. 4 The extraction of the j-th nonlinear circuit element.

The relations (3) and (4) determine the borders for the quantity $m_1 E$:

$$I_1(r_1 - r_2) < m_1 E < I_1(r_1 - r_2 + r_{n+1}) \tag{5}$$

As E decreases is obviously easier to find a number $m_1 \in \mathcal{N}$ so that the relation (5) be fulfilled. We seek a quantity E_0 so that for any $E < E_0$ the relation (5) be satisfied i.e. the extraction of a nonlinear circuit element having Zener diodes with any $E < E_0$ can be done.

Theorem 2. Satisfying the requirements of the theorem 1, the extraction of a nonlinear circuit element having Zener diodes with any $E < E_0$ can be done, where $E_0 = r_{n+1} I_1$.

Proof: There are two cases: $r_1 - r_2 \leqslant r_{n+1}(a)$ and $r_1 - r_2 > r_{n+1}(b)$. In the case a if $E > I_1(r_1 - r_2)$ one can take $m_1 = 1$ and therefore it is necessary that $E < I_1(r_1 - r_2 + r_{n+1})$ in order to satisfy the relation (5). If $E < I_1(r_1 - r_2)$, there is a $m_1 \geqslant 2$ so that the relation (5) can be satisfied. Therefore, in the case a $E_0 = I_1(r_1 - r_2 + r_{n+1})$. In the case b it is necessary that $m_1 > 1$. The difference between borders in (5) must be greater than E and this leads to $E_0 = r_{n+1} I_1$. The solution obtained for the case b is valid for the case a, too . Q.E.D.

The realizability conditions for a series connection of nonlinear elements in order to obtain a characteristic $u = f(i)$ are given by theorem 3. The theorem 3 was given in [2] without proof.

Theorem 3. The necessary and sufficient conditions in order to synthesise a characteristic $u = f(i)$ with a series connection of nonlinear cir-

cuit elements having the parameters m_jE, I_z, $R_1^{(j)}$, $R_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ are:
to exist $m_j \in \mathcal{N}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ so that:

$$\frac{m_jE}{R_2^{(j)}} + I_z\left(1 + \frac{R_1^{(j)}}{R_2^{(j)}}\right) \geq I_{max} (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

$$\frac{m_jE}{I_j} > r_j - r_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{7}$$

$$r_1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{m_jE}{I_j} > 0 \tag{8}$$

Proof. a) Necessity: The relation (6) is obvious, taking into account (1). The j-th extraction must be done so that N_j and N_j' (Fig. 4) be passive and locally passive. The relations for the calculation of the parameters of the nonlinear circuit element N_j are [2]:

$$I_j = \frac{m_jE}{R_2^{(j)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

$$r_j - R_2^{(j)} = r_{j+1} - \frac{R_1^{(j)} R_2^{(j)}}{R_1^{(j)} + R_2^{(j)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

N_j is passive and locally passive if $R_2^{(j)} > 0$ ($R_2^{(j)} > 0$ results from the relation (9)), and $R_1^{(j)} > 0$. From the relation (10) it results:

$$r_j - r_{j+1} < \frac{m_jE}{I_j}$$

i.e. the relations (8). N_j' is passive and locally passive if:

$$m_jE \leq r_1^{(j)} I_j \tag{11}$$

(where $r_1^{(j)}$ is the dynamic resistance of the first linear portion of the characteristic of N_j'), and

$$r_{n+1}^{(j)} > 0 \tag{12}$$

(where $r_{n+1}^{(j)}$ is the dynamic resistance of the $(n+1)$-th linear portion of the characteristic of N_j'). The relation (11) may be written as [2]:

$$r_1 - \sum_{k=1}^{j} \frac{m_kE}{I_k} \geq 0 \tag{13}$$

The relation (12) becomes :

$$r_{n+1} - \sum_{k=1}^{j} \frac{m_k E}{I_k} + r_1 - r_{j+1} > 0 \tag{14}$$

For $j = n$ the relations (13) and (14) lead to the relation (8). b) Sufficiency : The relation (6) provides that the current thorugh each Zener diode don't exceed I_z. The relations (7) provide the passivity and local passivity of the nonlinear circuit elements. Let us show that the relation (8) implies the passivity and local passivity of $N'_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ i.e. the relations (13) and (14). The case $j = n$ is obviously. If we add in the left side of (8) the positive (according to the relations (7)) quantity $\frac{m_n E}{I_n} - (r_n - r_{n-1})$, it results the relation (14) for $j = n - 1$; by this way results the relation (14) for $j = n - 2$ and so on. Similarly, the relation (13) for $j = n$ implies the same relation for $j = n - 1$ and so on Q.E.D.

In practice the Zener diodes are manufactured having only certain Zener voltages E. That is why an interval containing the allowable values of E is usefully to compute. The theorem 4 determines the value E_0 so that E can be chosen as $E \in (0, E_0)$.

Theorem 4. A characteristic $u = f(i)$ is realizable as stated in theorem 3 and assuming that $I_z \geqslant I_{max}$, if the Zener diodes have Zener voltage $E \in (0, E_0)$ where $E_0 = \dfrac{r_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{I_k}}$

Proof : We must prove that there is $m_k \in \mathcal{N}$ so that the relations (7) and (8) be satisfied for any $E < E_0 = \dfrac{r_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{I_k}}$ and $E > 0$.

Let be

$$\varepsilon_k = \frac{m_k E}{I_k} - (r_k - r_{k+1}) \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k E}{I_k} - (r_1 - r_{n+1})$$

The relation (8) becomes :

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k < r_{n+1} \tag{16}$$

Let be $\delta_k > \varepsilon_k$ so that

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k < r_{n+1} \tag{17}$$

Taking into account the relations (7) it results that:

$$I_k(r_k - r_{k+1}) < m_k E < \delta_k I_k + I_k(r_k - r_{k+1}) \tag{18}$$

Applying the theorem 2 for $k = 1, 2, \ldots, n$ it results that

$$E < \delta_k I_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

Adding the relations (19) for $k = 1, 2, \ldots, n$ and taking into account (17) we obtain $E < E_0 = \dfrac{r_{n+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{I_k}}$ Q.E.D.

3. Application

Let the nonlinear concave characteristic $u = f(i)$ be defined by the relations:

$$I_k = kI_1 \tag{19}$$

$$r_k = (n - k + 2)r_0$$

for $k = 1, 2, \ldots, n$. The realizability conditions for this characteristic are, according to the theorem 3:
to exist $m_j \in \mathcal{N}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ so that:

$$I_j + I_z\left(1 + \frac{R_1^{(j)}}{R_2^{(j)}}\right) \geqslant I_{max} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{m_j E}{I_j} > r_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j E}{jI_1} < (n + 1)\, r_0 \tag{20}$$

By choosing $m_j = j$, the values of $R_1^{(j)}$ and $R_2^{(j)}$ result, according to the relations (9) and (10):

$$R_2^{(j)} = \frac{E}{I_1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

$$R_1^{(j)} = \frac{r_0}{1 - \dfrac{r_0 I_1}{E}} \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

The realizability conditions in the case $m_j = j$ result from the relations (20):

$$r_0 I_1 < E < r_0 \frac{(n+1)}{n} I_1 \tag{22}$$

i.e. E must be contained in an interval of a magnitude $\frac{1}{n} r_0 I_1$.

According to the theorem 4, this characteristic is synthesisable for any $E \in (0, E_0)$ where

$$E_0 = \frac{r_0(n+1)I_1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \tag{23}$$

If we consider $n = 5$, in the case $m_j = j$ E must be contained in $(r_0 I_1, 1.2 r_0 I_1)$, and according to the theorem 4 E must be contained in a wider interval: $(0, 2.63 r_0 I_1)$.

4. Conclusions

The realizability conditions for a nonlinear concave characteristic synthesised with Zener diodes of given parameters have an outstanding practical importance. In this paper the synthesis is carried out with a series connection of nonlinear elements. The realizability conditions for the extraction of a nonlinear circuit element and for the synthesis of a characteristic $u = f(i)$ with $n + 1$ linear portions are given. An interval in which may be contained the Zener voltage E is computed so that a circuit element can be extracted or a characteristic $u = f(i)$ can be synthesised.

REFERENCES

1. *L. O. Chua*, Introduction to nonlinear network theory, McGraw-Hill Book Company, 1969.
2. *Fl. Constantinescu*, Sinteza caracteristicilor neliniare concave realizate cu diode Zener de un anume tip, Lucrările Sesiunii Ştiinţifice a Facultăţii de Electrotehnică din I.P.B. şi a I.C.P.E., octombrie 1980.
3. *L. O. Chua*, Nonlinear circuit theory, Memorandum No. UCB/ERL M78/28, 17 April 1978.

Condiţii de realizabilitate pentru caracteristicile neliniare concave

Caracteristica neliniară concavă $u = f(i)$ este sintetizată cu un lanţ serie de elemente neliniare de circuit. Sînt prezentate condiţiile de realizabilitate pentru un circuit care conţine diode Zener de un anumit tip. Se determină o mărime E astfel încît caracteristica să poată fi sintetizată cu diode Zener avînd tensiunea Zener $E < E_0$.

C.Z. : 681.325

ON THE HADAMARD TRANSFORM FOR BANDWIDTH COMPRESSION OF TELEVISION SIGNALS

V. NEAGOE, C. ROAŢ, C. POPA, P. VAINTRAUB *

First part of this paper presents a computer study of the performances obtained using the one-dimensional and respectively the two-dimensional Hadamard Transform for data compression of television pictures. By considering a test image of 64 × 64 pixels we evaluated the sample energies in the Hadamard space, the energy compression ratio, the error hystogram, and the signal-to-noise ratio for various data compression factors. The second part of the paper deals with the hardware and the subjective performances of the experimental system, performing the real time Hadamard transform of the input television signals having a bandwidth of 4 MHz and providing an output data flow of (12—22) Mbits/s.

Introduction

While the digitizing of the speech signal is characterized by a rate of 64 Kbits/s, a rigorous digitizing of the broadcast television signals requires a rate of about 100 Mbits/s. The aim of any efficient image coding method is to reduce the rate of transmission the digital picture signals (that is equivalent to reduce the corresponding required bandwidth), so that the cost of transmission to be reduced.

In the recent years, there has been an increasing interest concerning the using of orthogonal transforms for picture data compression (picture transform coding). For a given class of signals, having the same second-order statistics, the Karhunen-Loève Transform (KLT) is shown to be optimal for data compression. But the KLT is unique for a given class of signals, and, second, it does not generally have a fast algoritm available. Suboptimal transforms such as the Discrete Fourier Transform (DFT), the Discrete Cosine Transform (DCT), the Walsh-Hadamard Transform (WHT), the Slant Transform (ST), the Discrete Sine Transform (DST), and so on, which do not depend on the particular image class statistics, are used instead of KLT, with performances close of

* Lecturer Ph. D., Applied Electronics Dept.; Eng., Institute of Electrotechnica Research (I.C.P.E.); Eng., Institute of Electronic Technology Research (I.C.S.I.T.E.); Eng. Institute of Metrology and Hidrology (I.M.H.).

its. Among the above mentioned transforms, the Hadamard one has the advantage of a fast computational algorithm, and moreover, it requires only additions (without multiplications).

If X represents an „$N \times 1$" signal vector

$$X' = (x(0),\ x(1), \ldots, x(N-1)), \tag{1}$$

and H is the N-th order Hadamard unitary matrix, then the Hadamard transforming of X leads to

$$Y = H \cdot X, \tag{2}$$

so that the signal energy to be conserved

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |y(i)|^2. \tag{3}$$

As the other ortogonal transforms, the Hadamard one has the following important characteristics:

(i) The transform being orthogonal, it is avoid the computational effort to obtain the inverse matrix ($H' = H^{-1}$);

(ii) The picture samples are transformed into „generalized frequency" samples. Thus, one obtains a reordering of the information (energy) contained in the picture, so that the greatest amount of information is concentrated in the „low frequency" samples.

The Hadamard matrix (Hadamard ordered Walsh-Hadamard Transform) is given by the following recurrence relation

$$H_h(k) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_h(k-1) & H_h(k-1) \\ H_h(k-1) & -H(k-1) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

where $k = 1, 2, \ldots$

$$H_h(0) = 1, \tag{5}$$

the matrix $H(k)$ having the dimensions „$N \times N$", where $N = 2^k$.

For example,

$$H_h(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$H_h(2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

One can observe that the Hadamard matrix is a symmetric one.

Using the Walsh functions, one can define the Walsh ordered Walsh Hadamard matrix. It contains the same rows (columns) as the correspon-

ding Hadamard ordered Walsh-Hadamard matrix, but having a changed order.

For example,

$$H_w(2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Evaluating the performances of picture encoding by Hadamard transform

We consider two kinds of segmentations:
(a) one-dimensional;
(b) two-dimensional.

We used a 64 ×64 pixel 32 amplitude level image (FINGERPRINT), given in the Appendix of the book of Gonzales and Wintz [3]. This picture corresponds to a data matrix

$$MX = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,64} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{64,1} & \dots & x_{64,64} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_{i,j} \in \{0, 1, \dots, 31\} \\ i, j \in \{1, 2, \dots, 64\} \end{matrix} \tag{9}$$

We made a zonal coding, putting in correspondence to each of the one-dimensional „$N \times 1$" pixel area or the two-dimensional „$N = n^2$" one, a N-dimensional vector X (see the relation (1)), where $N = 2^k$. Thus, obtain a division of the whole image into $(64 \times 64)/N = N_1$ vectors.

We evaluated the covariance matrix in the signal space

$$\Sigma_X = E[(X - E(X))\,(X - E(X))'], \tag{10}$$

and the covariance matrix in the transformed space

$$\Sigma_Y = H \cdot \Sigma_X \cdot H. \tag{11}$$

If we extract the elements of the principal diagonal of Σ_Y (variances)

$$D = (d_1, \dots, d_N), \tag{12}$$

and reorder the above elements of D into the row vector

$$\Delta = (d_{i_1}, \dots, d_{i_N}), \tag{13}$$

such that

$$d_{i_1} \geqslant d_{i_2} \geqslant \dots \geqslant d_{i_N}, \tag{14}$$

then the row vectors D and Δ have the same elements but in a different order. Denote

$$IP = (i_1, \quad i_2, \dots, i_N). \tag{15}$$

To each of the N_1 picture vectors, we applied the Walsh Hadamard Transform (relation (2)) and retained only the elements of Y having the indices $i_1, i_2, \ldots i_p$, assuming the other $(N-p)$ elements to be zero. This is equivalent to assume a data compression factor of

$$F = N/p. \tag{16}$$

Then, we applied the inverse transform

$$\hat{X} = H \cdot \hat{Y}, \tag{17}$$

where $\hat{Y}$ is the truncation of Y, and $\hat{X}$ is the reconstructed picture vector. Using $N1$ vectors of the type $\hat{X}$, we obtain the reconstituted image in the form of a 64×64 data matrix

$$RXN = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} & \ldots & \hat{x}_{1,64} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{x}_{64,1} & \ldots & \hat{x}_{64,64} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

The 64×64 error matrix, REPS, can be computed as a difference

$$\text{REPS} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} & \ldots & \varepsilon_{1,64} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{65,1} & \ldots & \varepsilon_{64,64} \end{pmatrix} = |MX - RXN|. \tag{19}$$

To evaluate the performances of a picture coding algorithm, we used the following functions:

(i) The energy compression ratio for a given data compression factor F (see the relation (16))

$$K = \frac{\sum_{k=1}^{p} d_{i_k}}{\sum_{j=1}^{N} d_{i_j}} \cdot 100 \ [\%] \tag{20}$$

where d_{i_j} represent the ordered variances of the elements of Y (the elements of the vector Δ, according to the relations (13)).

(ii) The signal-to-noise ratio

$$(S/N)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{64} \sum_{j=1}^{64} x_{i,j}^2 \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{64} \sum_{j=1}^{64} \varepsilon_{i,j}^2 \right). \tag{21}$$

(iii) The error hystogram

$$H(k) = \begin{cases} \text{the number of errors } \varepsilon_{i,j} / k-1 \leqslant \varepsilon_{i,j} < k, \text{ for } k = 1, \ldots 6 \\ \text{the number of errros } \varepsilon_{i,j} / \varepsilon_{i,j} \geqslant 6, \text{ for } k = 7 \end{cases} \tag{22}$$

We considered a test picture, „FINGERPRINT", given in the book of Gonzales and Wintz [3], picture having fast changes of brightness. The considered picture has 64 ×64 pixels and 32 amplitude levels. The results of the picture coding simultation FORTRAN program are given in the Tables 1, 2, and 3.

Table 1

One-Dimensional Coding Performances
(Results of the Image Coding Simulation FORTRAN Program)

N		4		8		16	
Data compression factor F		2 :1	4 :1	2 :1	4 :1	2 :1	4 :1
Energy compression ratio K%		80.64	62.79	81.51	64.08	81.51	65.19
Signal-to-noise $(S/N)_{dB}$		12.46	9.74	12.68	9.83	12.78	9.93
Error hystogram $H(k)$	$k=1$	1580	1216	1684	1201	1592	1173
	$k=2$	792	658	828	674	886	701
	$k=3$	661	561	599	584	626	520
	$k=4$	408	444	393	497	456	495
	$k=5$	315	349	232	361	256	350
	$k=6$	168	301	193	247	167	276
	$k=7$	172	557	167	532	137	521

Table 2

Two-Dimensional Coding Performances
(Results of the Image Coding Simulation FORTRAN Program)

$N = n^2$		4	16	
Data compression factor F		2 :1	2 :1	4 :1
Energy compression ratio K%		80.64	86.45	69.34
Signal-to-noise ratio $(S/N)_{dB}$		12.46	13.16	11.65
Error hystogram $H(k)$	$k=1$	1580	1745	1438
	$k=2$	792	845	782
	$k=3$	661	630	633
	$k=4$	408	391	442
	$k=5$	315	234	226
	$k=6$	168	126	189
	$k=7$	172	125	286

Table 3

Illustration of the Spatial Error Pattern
(Results of the Image Coding Simulation FORTRAN Program)

(a) 8×8 pixel original picture segment of FINGERPRINT
(b) The spatial error pattern corresponding to (a), for a one-dimensional segmentation with $N = 4$ and a data compression factor of 2 : 1
(c) The spatial error pattern corresponding to (a), for a one-dimensional segmentation with $N = 16$ and a data compression factor of 2 : 1
(d) The spatial error pattern corresponding to (a), for a one-dimensional segmentation with $N = 16$ and a data compression factor of 4 : 1
(e) The spatial error pattern corresponding to (a), for a two-dimensional segmentation with $N = 4$ and a data compression factor of 2 : 1
(f) The spatial error pattern corresponding to (a), for a two-dimensional segmentation with $N = 16$ and a data compression factor of 2 : 1
(g) The spatial error pattern corresponding to (a), for a two-dimensional segmentation with $N = 16$ and a data compression factor of 4 : 1

(a)

22	19	20	23	30	16	10	15
25	30	23	22	26	29	19	14
17	22	29	29	18	22	26	29
23	16	15	27	30	19	17	25
18	25	22	15	19	28	17	16
12	16	20	20	13	15	22	15
17	11	12	21	20	13	13	16
16	20	17	13	13	19	17	13

(b)

2	1	1	2	7	7	2	3
2	3	1	0	1	2	3	2
2	3	0	0	2	2	7	6
4	3	6	6	6	5	4	4
3	4	4	3	4	5	1	0
2	2	0	0	1	1	4	3
3	3	4	5	4	3	1	2
2	2	2	2	3	3	2	2

(c)

4	1	4	1	6	2	2	3
3	1	1	1	0	2	1	3
2	1	2	4	2	2	3	2
0	3	3	6	6	2	4	1
5	3	5	3	4	6	0	2
1	1	1	1	0	0	2	2
2	3	4	5	4	3	2	1
0	3	0	3	4	1	3	0

(d)

0	3	1	4	11	3	7	2
4	1	2	1	0	3	1	4
6	1	5	5	3	1	6	7
2	5	7	5	9	2	5	3
4	3	3	4	2	7	1	2
4	0	4	4	4	2	4	3
2	4	4	5	6	1	2	1
0	4	0	4	1	5	1	3

(e)

2	1	1	2	7	7	2	3
2	3	1	0	1	2	3	2
2	3	0	0	2	2	7	6
4	3	6	6	5	5	4	
3	4	4	3	4	5	1	0
2	2	0	0	1	1	4	3
3	3	4	5	4	3	1	2
2	2	2	2	3	3	2	2

(f)

0	1	1	0	5	4	5	4
5	1	4	1	7	5	8	5
5	4	4	5	0	0	0	0
1	2	1	3	3	0	2	0
0	1	1	0	1	4	4	1
3	1	2	0	2	1	4	2
0	1	1	0	4	1	1	4
1	1	2	2	4	2	2	1

(g)

2	3	2	3	11	2	7	3
1	4	3	2	4	8	3	9
8	1	5	4	2	1	6	6
2	4	4	6	7	5	6	3
2	2	2	2	1	6	3	1
2	1	0	3	1	1	3	1
2	1	3	2	5	0	3	2
4	3	4	3	5	3	4	2

We observed that for a vector dimension $N = 4$ and a 2 : 1 data compression factor, the performances are identical both for one-dimensional and for two-dimensional segmentation. This numerical result can be easy theoretically proved.

Increasing the vector dimension N does not lead to significant increasing of the coding performances.

Real time Hadamard transform of television pictures

We achieved an experimental system performing the Hadamard transform of television signals in real time. According to the previous simulation results and to the aim of simplifying the hardware, we choosed a one-dimensional coding variant with $N = 4$. We used the Walsh ordered Walsh Hadamard matrix, given in the relation (8); it has the advantage over the corresponding Hadamard ordered Walsh Hadamard matrix, that the variances of the elements within the Y vector have a natural decreasing order, i.e. (see the relation (15))

$$(IP)_w = (1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{23}$$

The orthogonal transform

$$Y = H_w(2) \cdot X \tag{24}$$

can be obtained using a fast computational algorithm (Fig. 1). We used only the first two significant samples in the Walsh-Hadamard space ; it allows to simplify the direct and inverse FWHT algorithms (Fig. 2 and Fig. 3).

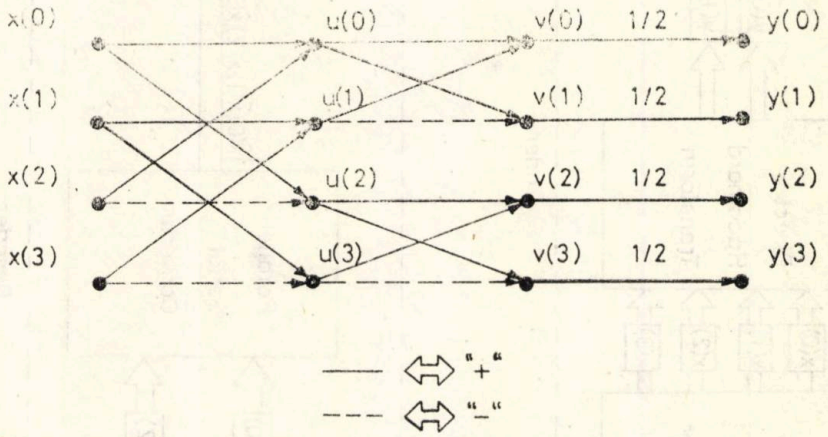


Fig. 1 — The Fast Walsh-Hadamard computational algorithm.

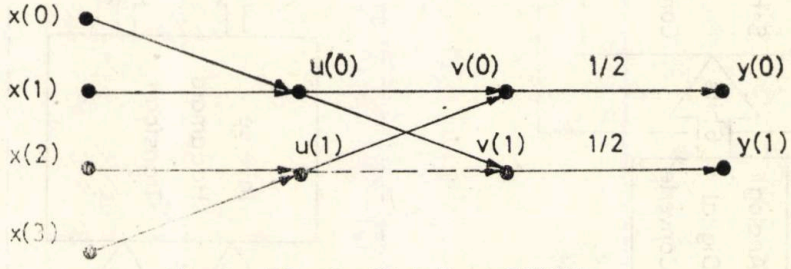
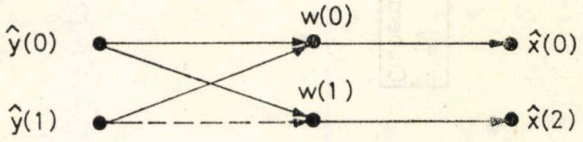


Fig. 2 — The simplified direct FWHT.

Fig. 3 — The simplified inverse FWHT



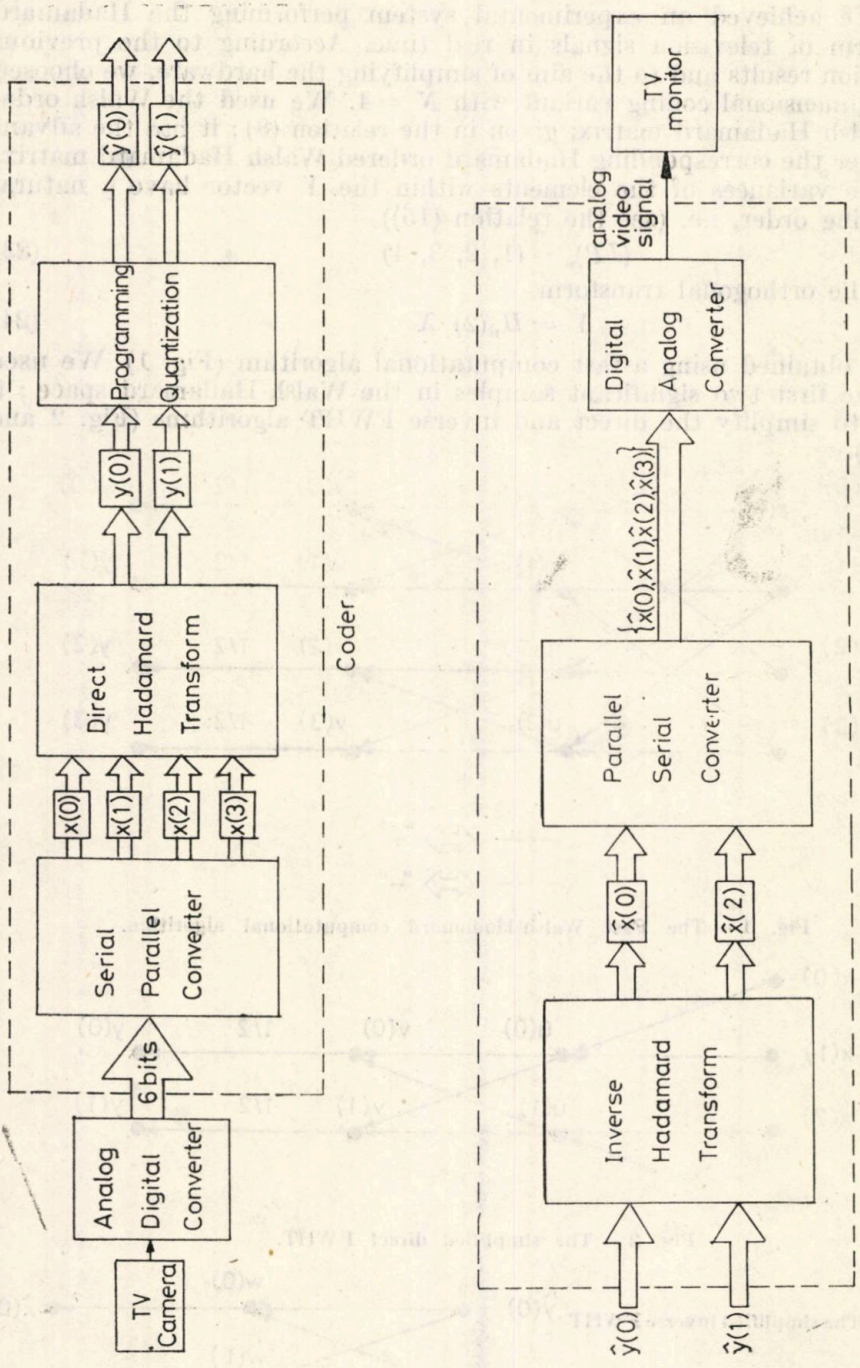


Fig. 4 — Experimental system for real time Hadamard transform of television signals.

The block diagram of the experimental system is shown in Fig. 4.

The video signal supplied by a TV camera is passed through a video amplifier having a bandwidth of 4 MHz and then is sampled with a frequency of 8 MHz (which corresponds to a sampling period $T = 125$ ns). The analog-to-digital converter effects a fast digitizing of the television signals with 6 bits/sample (48 Mbits/s). The digitized samples are grouped into vectors of four samples by a serial-parallel converter; they are retained in a buffer of 24 bits for a time interval of $4T = 500$ ns.

To perform the direct and inverse WHT we used a computing unit for addition and substraction having a computation time of 200 ns (for adding or substracting two numbers of 8 bits each). According to the Fig. 2, the direct WHT requires two cascades units, therefore the total computational time is less than 500 ns (the division by 2 is obtained as a result of a simple shifting). Thus, the first two significant Walsh Hadamard transformed samples $y(0)$ and $y(1)$ are stored in a 12 bit buffer. The second sample $y(1)$, can be quantized with a resolution which can be programmed (the system has the possibility of choosing the number of bits assigned to this sample whitin the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). Since we have retained only two samples, the inverse WHT can be obtained using only two operations: an addition and a substraction (Fig. 3), but in a parallel manner (the average time of 200 ns being less than the total computational time of 500 ns). Thus, we yield the reconstructed samples $x(0)$, $x(2)$. Each of them has to be maintained at the input of a digital-to-analog converter a time interval of 250 ns ($2T$); this task is performed by a parallel-serial converter, preceding the 6 bit digital-to-analog converter. The reconstructed analog signals are applied at the input of a TV monitor, so that, on its screen, the good quality of the reconstituted pictures can be evaluated. (Fig. 5).

Fig. 5 a — Hadamard transformed picture and reconstructed with 2.75 bits/Nyquist sample (22 Mbits/s).

Fig. 5b — Hadamard transformed picture and reconstructed with 1.5 bits/Nyquist sample (12 Mbits/s).

The system has the possibility of programming the compression factor within the set

$$\{4;\ 3.43;\ 3;\ 2.67;\ 2.5;\ 2.18\},$$

which is equivalent to have an average number of bits per sample whitin the set

$$\{1.5;\ 1.75;\ 2;\ 2.25;\ 2.5;\ 2.75\},$$

and it implies a corresponding bit rate in Mbits/s whitin the set

$$\{12;\ 14;\ 16;\ 18;\ 20;\ 22\}.$$

REFERENCES

1. *W. K. Pratt, J. Kane, H. C. Andrews*, Proceedings IEEE, vol. 57, nr. 1, pp. 58—68, Jan 1969.
2. *N. Ahmed, K. R. Rao*, „Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
3. *R. C. Gonzales, P. Wintz*, „Digital Image Processing", Reading MA : Addison Wesley, 1977.
4. *A. N. Netravali, J. O. Limb*, Proceedings IEEE, vol. 68, Nr. 3, pp. 366—406, March 1980.
5. *A. K. Jain*, Proceedings IEEE, vol. 69, Nr. 3, pp. 349—389, March 1981.

Asupra transformării Hadamard pentru compresia benzii de frecvență a semnalelor de televiziune

Prima parte a acestei lucrări prezintă un studiu pe calculator al performanțelor obținute utilizînd Transformarea Hadamard unidimensională și respectiv bidimensională pentru compresia de date a imaginilor de televiziune. Considerînd o imagine test de 64×64 pixeli, am evaluat energiile eșantioanelor în spațiul Hadamard, raportul de compresie al energiei, histograma erorilor și raportul semnal/(zgomot de cuantizare) pentru diferiți factori de compresie a datelor. A doua parte a lucrării este dedicată prezentării structurii și a performanțelor subiective ale sistemului experimental, care realizează transformarea Hadamard în timp real a semnalelor de televiziune avînd banda de 4 MHz și furnizează un debit de date la ieșire de (12 — 22) Mbiți/s.

C. Z. : 621.316

ESTIMAREA UNOR CARACTERISTICI ALE VARIAȚIEI ALEATOARE A PARAMETRILOR DE CALITATE A ENERGIEI ELECTRICE

P. POSTOLACHE *

În lucrare se propune o metodă generală de estimare a probabilității de variație a parametrilor de calitate a energiei electrice. Se ține seama de legea de repartiție și de funcția care descrie acțiunea parametrului de calitate asupra caracteristicilor funcționale ale receptorului de energie electrică.

Funcționarea corectă a unui receptor de energie electrică (EE) și durata sa de serviciu sînt în strînsă dependență cu calitatea energei furnizate.

Calitatea EE livrate într-un anumit nod al unei rețele electrice trifazate este descrisă de următorii parametri : variația de tensiune, nesimetria sistemelor de tensiune și curent, regimul deformant, variația de frecvență, continuitatea serviciului [1].

În diferite țări, au fost elaborate acte normative — unele din ele deja depășite — privind calitatea EE, responsabilitățile în proiectarea și funcționarea rețelelor electrice, modul de supraveghere a parametrilor calitativi și periodicitatea măsurătorilor în rețele [2], [3]. În țara noastră nu a fost încă realizat un standard în acest sens, fapt ce face ca elaborarea lui, să fie foarte actuală.

În practică, conform normelor în vigoare, se consideră că un receptor funcționează normal dacă variația fiecărui parametru de calitate a EE nu depășește o anumită valoare acceptată ca admisibilă. Acest mod de normare introduce o dificultate principială : raportarea variației reale — avînd caracter aleatoriu — a parametrului de calitate la o mărime constantă, impusă de norme. Luînd în considerare caracterul aleatoriu al modificărilor parametrilor calitativi ai EE, unele acte normative încearcă să evite dificultatea menționată stabilind — fără o justificare riguroasă, doar pe baza unei anumite experiențe de exploatare — că variația unui parametru de calitate poate fi considerată ca acceptabilă dacă probabilitatea p ca aceasta să nu depășească valoarea normată este admisibilă (de ex. $p = 0{,}95$) [4], [5].

---

* Șef lucrări ing., Catedra Rețele electrice.

Deoarece un asemenea mod de abordare a problemei nu este consistent, apare, în mod firesc, necesitatea stabilirii unor criterii de echivalare a celor 2 mărimi. În lucrarea [6], analizîndu-se efectele componentelor de secvență inversă de tensiune și de curent asupra mașinilor electrice, se folosește drept criteriu de echivalență efectul termic al celor două mărimi : constantă — prescrisă de norme — și variabilă, reală.

În continuare se propune o generalizare a rezultatelor obținute în lucrarea menționată.

Fie $X(t)$ — variabila aleatoare (v.a.) continuă definită de un parametru de calitate a EE (tensiune, frecvență, etc.),

x — o valoare oarecare a acestei v.a.,

$u(x)$ — funcția care descrie acțiunea parametrului de calitate asupra unei caracteristici funcționale a receptorului (de ex. influența tensiunii asupra duratei de funcționare).

Acceptînd ipoteza că procesul aleator este staționar vom defini valoarea acceptabilă (admisibilă) x_a a v.a. X prin relația :

$$u(x_a) = \frac{1}{T}\int_0^T u(x, t)\, dt = M(u(x, t)) \tag{1}$$

unde T = durata luată în considerare

$M(u(x, t))$ = valoarea medie temporală a v.a.

Se știe că x poate fi exprimat în funcție de valoarea medie $M(X)$ și de abaterea standard $\text{as}(X)$ sub forma [7] :

$$x = M(X) + \beta\, \text{as}(X) \tag{2}$$

unde β este un parametru funcțional care va fi determinat mai jos.

Fie β_a valoarea parametrului care satisface relația :

$$x_a = M(X) + \beta_a\, \text{as}(X) \tag{3}$$

Din (1) și (3) rezultă că :

$$u(M(X) + \beta_a\, \text{as}(X)) = M\,(u(x,\ t)) \tag{4}$$

relație care permite să se determine β_a dacă se cunoaște expresia analitică a funcției $u(x)$ pentru un anumit tip de instalație (receptor).

În lucrarea [6] se tratează funcția $u(x) = bx^2$, unde b este o constantă tehnologică. Vom analiza în continuare cazul mai general al unei funcții de forma :

$$u(x) = bx^n, \quad n \in N \tag{5}$$

N fiind mulțimea numerelor naturale.

O asemenea funcție este frecvent întîlnită în electroenergetică : încălzirea unui receptor este proporțională cu pătratul curentului electric — $n = 2$; durata de serviciu a unei lămpi cu incandescență este proporțională cu puterea a 14-a a tensiunii — $n = 14$, etc. [1]

În cazul particular (5) relația (4) devine :

$$(M(X) + \beta_a \ \mathrm{as}(X))^n = M(X^n) \tag{6}$$

din care rezultă :

$$\beta_a = \frac{\sqrt[n]{M(X^n)} - M(X)}{\mathrm{as}(X)} \tag{7}$$

sau

$$\beta_a = \frac{\sqrt[n]{M(X^n)/(M(X))^n} - 1}{CV(X)} \tag{8}$$

unde $CV(X) = \dfrac{\mathrm{as}\ (X)}{M(X)}$ este coeficientul de variație.

În relațiile (6) — (8) cantitatea $M(X^n)$ este momentul necentrat de ordinul n (dacă există) care se calculează cu :

$$M(X^n) = \int_R x^n f(x)\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

în care $f(x)$ este funcția de repartiție a v.a. X și R este mulțimea numerelor reale.

Admitem că X are o distribuție normală, situație frecvent întîlnită în practică. În acest caz particular, utilizînd notațiile $m = M(X)$, $\sigma = \mathrm{as}(X)$ și $\gamma = CV(X)$, funcția de repartiție este :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\ (-\beta^2) \tag{10}$$

unde

$$\beta = \frac{x - m}{2} \tag{11}$$

Din relațiile (8), (9) și (10) rezultă că :

$$M(X^n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R (\beta\sigma\sqrt{2} + m)^n \exp\ (-\beta^2)\ \mathrm{d}\beta \tag{12}$$

Efectuînd dezvoltarea binomului, integrala de mai sus se descompune într-o sumă de integrale de forma :

$$I_n = \int_R \beta^n \exp\,(-\beta^2)\ \mathrm{d}\beta \tag{13}$$

Acestea pot fi calculate cu relația de recurență

$$I_n = \frac{n-1}{2} \int_R \beta^{n-2} \exp\,(-\beta^2)\ \mathrm{d}\beta \tag{14}$$

care conduce, în final, la :

$$\int_R \exp(-\beta^2)\, d\beta = \sqrt{\pi} \quad \text{pentru } n \text{ par} \tag{15}$$

$$\int_R \exp(-\beta^2)\, d\beta = 0 \quad \text{pentru } n \text{ impar} \tag{16}$$

Integrala (12) conține deci numai termeni cu puteri pare ale abaterii standard σ avînd coeficienții :

$$I_n = 2^{\frac{n}{2}}(n-1)!_i\sqrt{\pi} \tag{17}$$

unde $(n-1)!_i$ reprezintă produsul numerelor impare de la 1 pînă la $n-1$.

În consecință expresia de sub radicalul din (8) devine :

$$M(X^n)/(M(X))^n = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \gamma^k (k-1)!_i \tag{18}$$

relație în care C_n^k reprezintă numărul combinărilor de n elemente luate cîte k; $k = 2j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

De exemplu :

— pentru $n = 5$

$$M(X^5)/(M(X))^5 = 1 + C_5^2\gamma^2 1 + C_5^4\gamma^4 1\cdot 3 = 1 + 10\gamma^2 + 15\gamma^4$$

— pentru $n = 7$

$$M(X^7)/(M(X))^7 = 1 + C_7^2\gamma^2 1 + C_7^4\gamma^4 1\cdot 3 + C_7^6\gamma^6 1\cdot 3\cdot 5 =$$

$$= 1 + 21 + \gamma^2 + 105\,\gamma_4 + 105\,\gamma^6$$

Curbele $\beta_a = f(n, \gamma)$ determinate cu relațiile (8) și (18) sînt trasate în figura 1. În figura 2 se prezintă $p_a = f(n, \gamma)$ pentru funcția de repartiție normală.

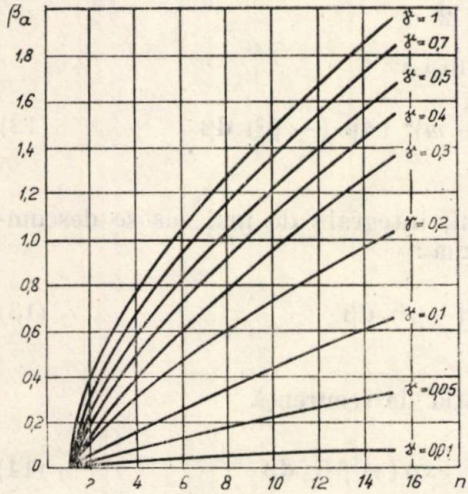


Fig. 1

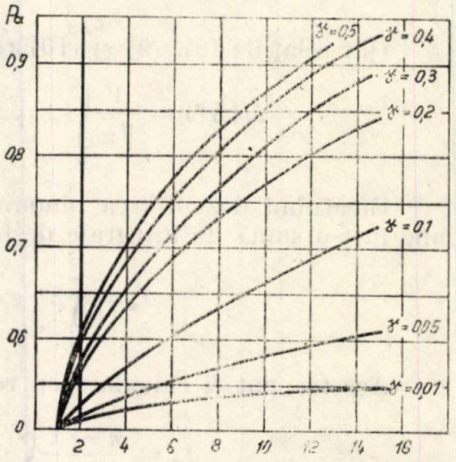


Fig. 2

Din analiza acestor curbe se constată că valoarea probabilității de încadrare a parametrului într-o plajă admisibilă (p_a) depinde de caracteristicile procesului și că, în consecință, ea nu poate fi general normată. Totodată se observă că valoarea $p_a = 0{,}95$, prescrisă în anumite norme, este optimistă.

Concluzii

1. Procedeul de calcul descris dă o metodologie generală de estimare a probabilității de încadrare a variației aleatoare a unui parametru de calitate a EE, în cazul diferitelor legi de repartiție a acestuia și al diferitelor forme ale funcției $u(x)$.

2. Determinarea corectă a relației funcționale $u(x)$ și a funcției de repartiție a v.a. sînt de mare importanță în normarea valorii admise a parametrului de calitate.

3. Cunoașterea funcției $u(x)$ permite să se stabilească un criteriu de echivalare între variația aleatoare reală a parametrului de calitate și valoarea normată, constantă, a acestuia.

4. În condițiile de exploatare, metoda prezentată permite să se determine regimurile de lucru acceptabile pentru diferite tipuri de instalații.

5. În aprecierea calității serviciului unei instalații este necesar să se analizeze influența simultană a tuturor parametrilor de calitate ai EE asupra funcționării acestuia. În acest sens, elaborarea unui act normativ general devine tot mai necesară.

BIBLIOGRAFIE

1. *Albert, Hermina, Florea, I., Iordănescu, I.*, Alimentarea cu energie electrică a întreprinderilor industriale, ET, București, 1978.
2. * * * British Standard 77/1958.
3. * * * GOST 13109—67.
4. *Besmertnîi, I. S.*, Electricestvo, nr. 10, p. 21, 1962.
5. *Bilik, N. I.*, Electricestvo, nr. 8, p. 47, 1964.
6. *Zaslavskaia, T. B., Jelezenko, Iu. S., Neiman, V. V.*, Electricestvo, nr. 9, p. 58, 1981.
7. *Tovissi, L., Vodă, V. Gh.*, Metode statistice. Aplicații în producție.,Editura științifică și enciclopedică, București, 1982.

Sur l'estimations des caractéristiques aléatoires des paramètres de qualité de l'énergie électrique

On propose une méthode générale d'estimation de la probabilité de variation des paramètres de qualité de l'énergie électrique. On tient compte de la loi de répartition et de la fonction qui décrit l'action du paramètre de qualité sur certaines caractéristiques du récepteur de l'énergie électrique.

C. Z.: 621.3.032.43

GENERATOR DE SEMNAL ŞI AMPLIFICATOR DE PUTERE CU AMPLIFICATOARE OPERAŢIONALE ÎN STRUCTURA DISCRETĂ

I. DIMA, I. DRĂGHICI *

Se prezintă schema unui amplificator operaţional în structură discretă cu ajutorul căruia s-a realizat un generator de semnale sinusoidale şi dreptunghiulare precum şi un amplificator de putere, toate cu performanţe ridicate.

1. Introducere

Generatorul de semnal şi amplificatorul de putere ce fac obiectul acestei lucrări sînt realizate folosind amplificatoare operaţionale în structură discretă cu tranzistoare de uz general.

Prin utilizarea structurii de amplificator operaţional discret se asigură o bandă mare de frecvenţă, viteză mare de răspuns, tensiune de ieşire suficient de mare.

2. Structura discretă a amplificatorului operaţional

Ideea construirii unui amplificator operaţional în structură discretă a apărut din necesitatea folosirii unor amplificatoare operaţionale cu frecvenţă de tăiere mare (peste 1 MHz) şi viteză de răspuns ridicată (peste 10 V/μs) utilizate la construcţia unor generatoare de semnal performante.

În fig. 1 se prezintă schema de bază a acestei structuri.

Amplificatorul operaţional în structură discretă (AOD) prezentat în figura 1 conţine un etaj diferenţial de intrare (realizat cu tranzistoarele T_1 şi T_2) al cărui curent este menţinut constant în emitoare datorită generatorului de curent constant (tranzistorul T_3). Ieşirea din etajul diferenţial se face asimetric, atacîndu-se un etaj de tip emitor comun construit cu tranzistorul T_4, curentul de colector fiind dat de generatorul de curent constant realizat cu tranzistorul T_5. Etajul final al structurii este cu simetrie complementară, construit cu tranzistoarele T_7, T_8 ce lucrează în clasă AB curentul de repaus variindu-se cu ajutorul rezistenţei semireglabile S_2 din montajul superdiodă, realizat cu ajutorul lui T_6 ce

* Ing. IPEE Electroargeş, Curtea de Argeş; Şef lucrări ing., Catedra Dispozitive, circuite şi aparate electronice.

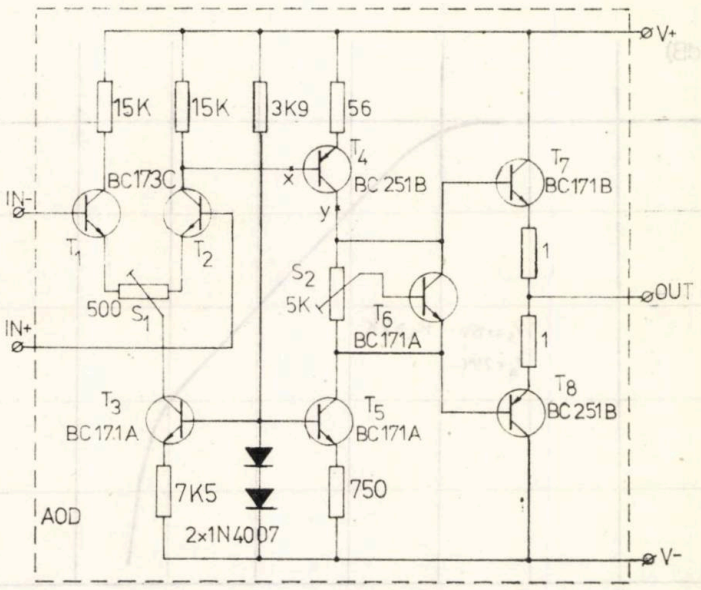


Fig. 1

polarizează tranzistoarele finale. Tensiunea continuă ce ar putea apare la ieşire datorită neîmperecherilor este anulată cu semireglabilul S_1.

Performanţele şi caracteristicile structurii sînt :

Valori limită absolute :

Tensiunea de alimentare	±20 V
Tensiunea de intrare pe mod comun	± 15 V
Tensiunea de intrare pe mod diferenţial	± 30 V
Gama temperaturii de funcţionare	0...+70°C

Caracteristici electrice

	MIN	TIP	MAX	UNIT.
Tensiune de decalaj la intrare, V_{os}		10	20	mV
Curentul de decalaj la intrare, I_{os}		100	500	A
Curentul de polarizare la intrare, I_I		200	500	nA
Rezistenţa de intrare, R_I	100	500		KΩ
Amplificarea în buclă deschisă, A_{VO}	10.000	20.000		
Curentul de alimentare, I_S		1	2	mA
Viteza de urmărire, SR		10*		V/μs
Factorul de rejecţie pe mod comun, $CMMR$	55	65		dB
Factorul de rejecţie al tens. de alim. $SVRR$	55	65		dB

* Pentru $a_{VO} = 1, SR = 40$ V/μs

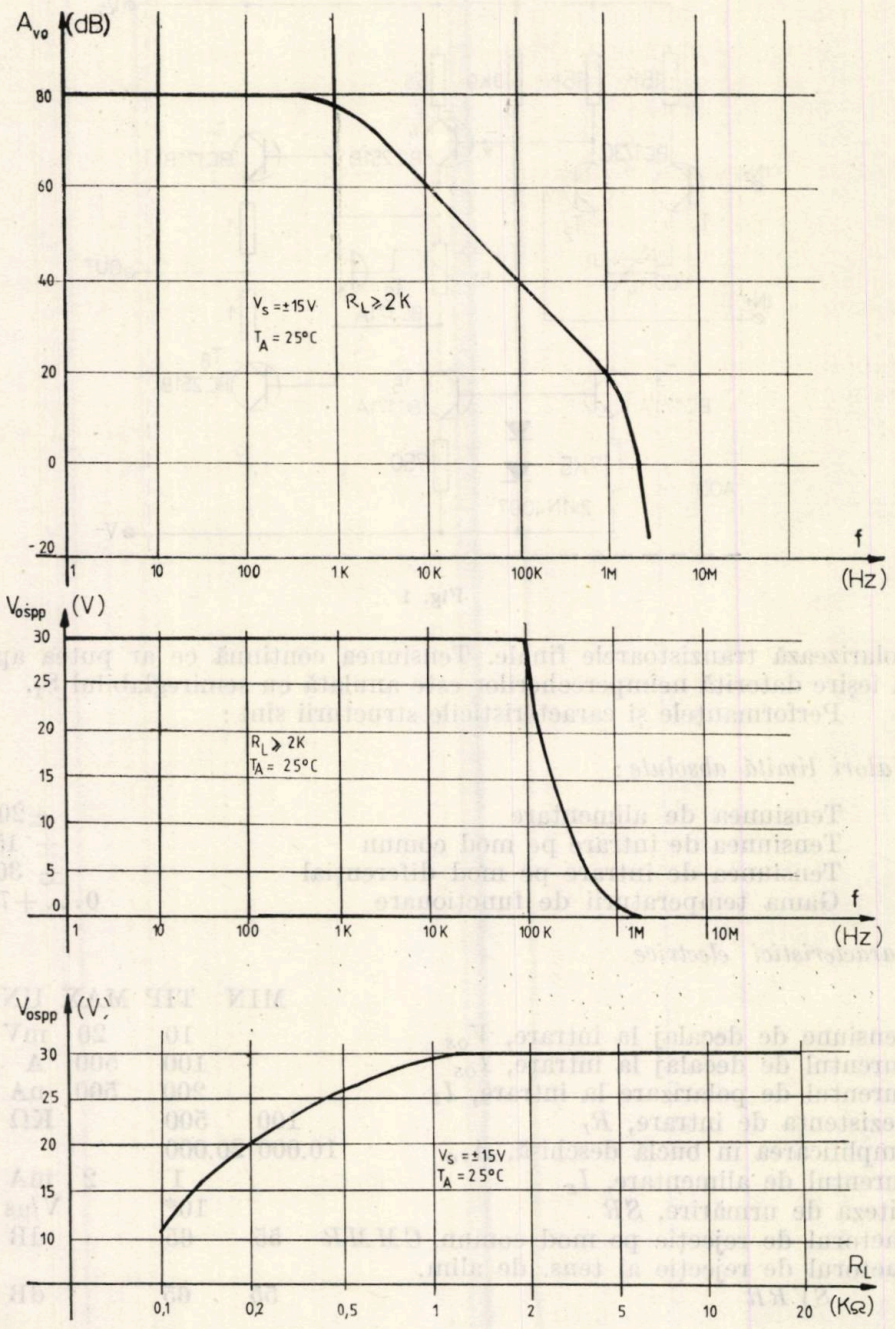

A_{vo} (dB)
80
60
40
20
0
-20
$V_S = \pm 15V$
$T_A = 25°C$
$R_L \geq 2K$
1
10
100
1K
10K
100K
1M
10M
f
(Hz)
V_{ospp} (V)
30
25
20
15
10
5
0
$R_L \geq 2K$
$T_A = 25°C$
1
10
100
1K
10K
100K
1M
10M
f
(Hz)
V_{ospp} (V)
30
25
20
15
10
$V_S = \pm 15V$
$T_A = 25°C$
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
20
R_L
(KΩ)

Fig. 2

Se remarcă lipsa oricăror capacităţi în schemă ceea ce o face funcţionabilă corect şi în c.c. Amplificatorul nu este compensat dar nu creează probleme deosebite pînă la frecvenţa de 1 MHz.

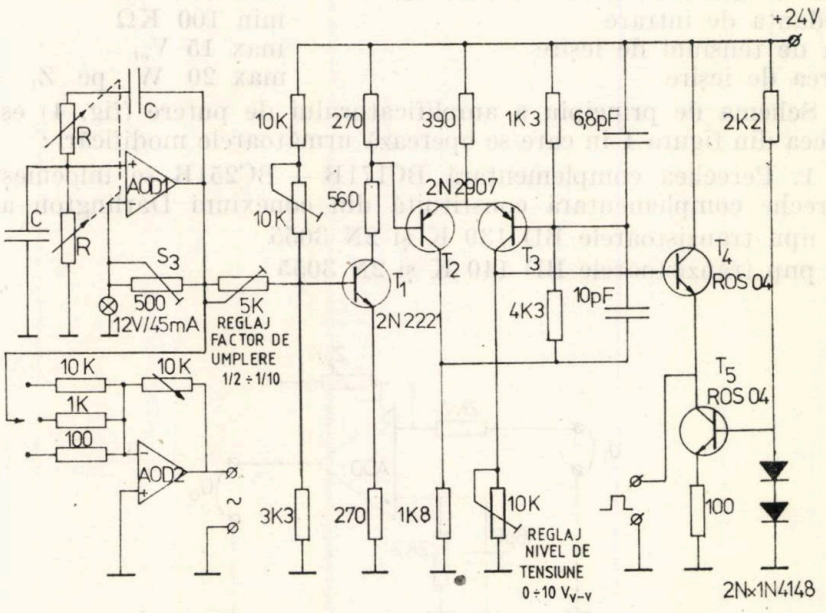
În fig. 2 sînt date : caracteristica de frecvenţă, excursia de tensiune la ieşire funcţie de frecvenţa şi excursia de tensiune la ieşire funcţie de rezistenţa de sarcină.

3. Generatorul de funcţii

Folosind structura prezentată anterior s-a realizat un generator de semnal sinusoidal şi dreptunghiular cu următoarele caracteristici :

Gama de frecvenţe	1 Hz— 1 MHz (6 subgame)
Tensiunea de ieşire	max 10 V pînă la 1 MHz
Sarcina admisă la ieşire	min 50 Ω
Stabilitatea frecvenţei	mai bună ca 0,1%
Stabilitatea amplitudinii	mai bună ca 0,1%

Schema bloc este dată în fig. 3 şi conţine 2 structuri AOD1 şi AOD2



R=10 K (variabil) C = 150 pF - gama 0,1 - 1 MHz C = 150 nF - gama 0,1 - 1 KHz
C = 1500 pF - gama 10 - 100 KHz C = 1,5 μF - gama 10 - 100 Hz
C = 15 nF - gama 1 - 10 KHz C = 15 μF - gama 1 - 10 Hz

Fig. 3

Reacţia pozitivă (reţeaua Wien) este cuplată pe borna neinversoare a structurii AOD1, iar reacţia negativă (becul de 12 V/45 mA şi rezistenţa reglabilă de 500 Ω) este cuplată pe borna inversoare a acestei structuri.

Tensiunea de ieşire sinusoidală este reglabilă brut în trei trepte şi fin pe fiecare decadă obţinîndu-se în final o variaţie de la 0,01 la 10 V cu structura AOD2 care are perechea complementară BC 171B — BC 251B înlocuită cu perechea BD 139K — BD 140K.

Schema bloc mai conţine un discriminator Schmitt pe intrarea căruia se cuplează tensiunea sinusoidală obţinută după AOD1. Se obţine semnal dreptunghiular cu tensiunea de ieşire variabilă între 0—10 V, şi factor de umplere variabil între 1 : 2 şi 1 : 10. Au fost vizualizate pe osciloscop fronturi posterioare de 50 ns şi fronturi anterioare de 75 ns.

4. Amplificatorul de putere

Folosind aceeaşi structură (AOD) se poate realiza un amplificator de putere cu următoarele caracteristici:

Tensiunea de alimentare	max $\pm$20 V
Tensiunea de intrare	max 3 V_{vv}
Curent de alimentare	max 1,5 A
Amplificarea în buclă deschisă, A_v	min 10.000
Viteza de urmărire a semnalului, SR	min 10 V/μs
Impedanţa de intrare	min 100 KΩ
Plaja de tensiuni de ieşire	max 15 V_{ef}
Puterea de ieşire	max 20 W pe Z_L = 8Ω

Schema de principiu a amplificatorului de putere (fig. 4) este de fapt cea din figura 1 în care se operează următoarele modificări:

1. Perechea complementară BC171B — BC251B se înlocuieşte cu o pereche complementară constituită din conexiuni Darlington astfel:

npn tranzistoarele BD 139 K şi 2N 3055

pnp tranzistoarele BD 140 K şi 2N 3055

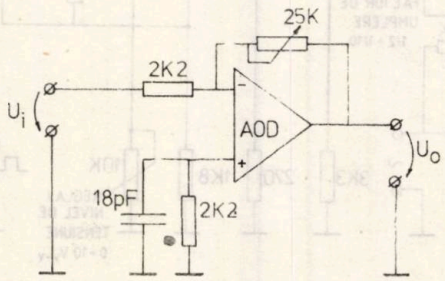


Fig. 4

Tranzistoarele finale (2 N 3055) sînt montate pe radiatoare.

2. Rezistenţa de protecţie termică în emitoarele perechilor complementare este de 0,5Ω/2 W.

3. Între borna neinversoare şi masă se conectează grupul R = 2,2 KΩ în paralel cu C = 18 pF. Prezenţa acestui condensator este necesară pentru a evita distorsiunile de supramodulaţie.

4. Rezistența negativă constituită din rezistența fixă $R_1 = 2{,}2$ KΩ și rezistența variabilă $R_F = 25$ KΩ este conectată ca la un amplificator operațional în conexiune inversoare.

Cu ajutorul semireglabilului S_1 se minimizează tensiunea de decalaj la intrare, iar cu semireglabilul S_2 se fixează un curent de repaus de $5 \div 10$ mA.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. G. Graeme, G. E. Tobey, L. P. Huelsman* „Operational Amplifiers. Design and Applications", McGraw Hill Book Company, New York, 1971.
2. * * * Circuite integrate liniare. Catalog IPRS, 1981.

Signal Generator and Power Amplifier Made by Using a Discrete Structure Operational Amplifiers

An operational amplifier in discrete structure was implemented. This structure was further used to make a good performances signal generator of sinusoidal and rectangular waveforms and a power amplifier.

NOTĂ

C.Z.: 621.313

O SCHEMĂ DE FOLOSIRE A SELSINELOR CA TRADUCTOARE LINIARE A UNGHIULUI DE ROTAȚIE ÎN TENSIUNE ALTERNATIVĂ

M. GH. IONESCU *

Se propune o schemă simplă de folosire a selsinului monofazat, ca traductor liniar al unghiului de rotație într-o tensiune alternativă, asigurînd o caracteristică intrare-ieșire în regim staționar sinusoidal, cu liniaritate pronunțată într-o gamă relativ largă de variație a unghiului de rotație ($\pm 70° \ldots 80°$).

Schema propusă este analizată teoretic adoptînd ipoteze simplificatoare, explicîndu-se caracterul liniar al caracteristicii și indicînd căile de alegere optimă a parametrilor selsinului, în vederea asigurării liniarizării celei mai bune.

Rezultatele experimentale confirmă prevederile teoretice cu o precizie de $\pm 5\%$, chiar în cazurile în care parametrii selsinului se abat de la valorile lor optime.

1. Introducere

Printre aplicațiile diverse ale selsinelor se cunoaște și folosirea lor ca traductoare „unghi de rotație — tensiune alternativă" după o schemă ca cea din fig. 1 [1], denumită impropriu schemă de funcționare în regim „transformator".

Dacă rotorul selsinului receptor SR este calat la 90° electrice față de axa fazei A de sincronizare, considerată ca axă de referință pentru unghiul θ, atunci tensiunea U_e în valoare efectivă la bornele înfășurării rotorice fixe SR depinde de unghiul electric θ de rotație a rotorului SE după o funcție de forma:

$$U_e = k \cdot U_i \cdot \sin \theta \qquad (1)$$

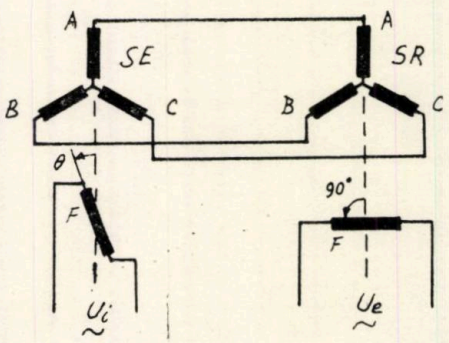


Fig. 1. — Funcționarea în regim „transformator" a două selsine.

Dezavantajele unei asemenea scheme de traductor sînt următoarele:

a. Schema necesită folosirea a două selsine.

b. Există prea multe conductoare de legătură.

c. Dependența semnalului de ieșire funcție de cel de intrare nu este

* Conf. dr. ing., catedra Mașini electrice

liniară, ci sinusoidală, liniaritatea fiind asigurată doar în zone reduse de variaţie a unghiului ($\pm 30°$).

În opoziţie cu această schemă clasică, autorul propune o schemă nouă, care în locul dezavantajelor expuse, prezintă trei avantaje:

a. Noua schemă necesită un singur selsin, preferabil de tipul cu întrefier uniform (poli înecaţi).

b. Conductoarele de legătură sînt puţine.

c. Dependenţa semnalului de ieşire funcţie de cel de intrare este liniar-proporţională într-o zonă largă de variaţie a unghiului ($\pm 80°$), dacă circuitul de ieşire funcţionează practic în gol.

2. Descrierea schemei propuse

Selsinul folosit este alimentat de la o reţea de curent alternativ monofazat, printr-o schemă electrică nesimetrică, conform fig. 2.

Rezistenţele egale R, au valori mult mai ridicate ca impedanţele fazelor statorice de sincronizare, fiind practic de ordinul miilor de ohmi.

Poziţia de zero (semnal nul la ieşire) corespunde unui unghi de 90° electrice al rotorului, *în urma* axei fazei A statorice.

În aceste condiţii se constată experimental că valoarea efectivă a tensiunii de ieşire U_e în gol, depinde liniar de unghiul α de rotaţie al axului, indiferent de sensul rotaţiei, în limitele largi de variaţie a acestuia ($\pm 80°$).

3. Justificarea teoretică

Să considerăm schema electrică din fig. 3, cu sensurile pozitive pentru curenţi şi tensiuni adoptate pe figură şi cu polaritatea indicată de asemenea pe figură, a înfăşurărilor, pentru luarea în consideraţie corectă în ecuaţie a valorilor pozitive sau negative ale inductanţelor mutuale (convenţia uzuală adoptată în electrotehnică). [2].

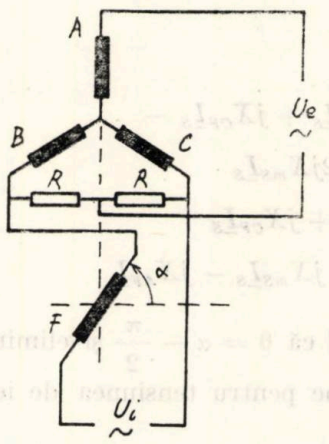


Fig. 2 — Schema propusă de folosire a selsinului ca traductor unghi-tensiune.

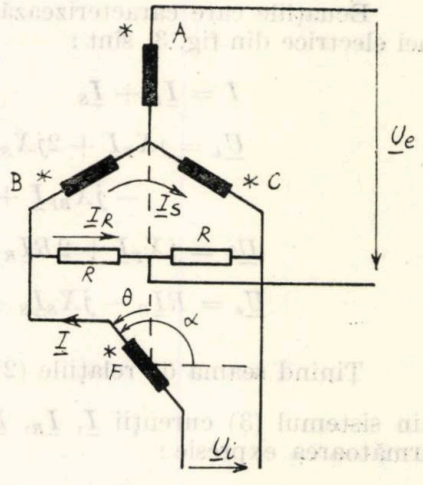


Fig. 3. — Convenţii adoptate pentru scrierea ecuaţiilor.

Vom adopta următoarele *ipoteze* simplificatoare:

— Înfășurările selsinului A, B, C, F au caracter pronunțat inductiv, putînd să neglijăm rezistențele în raport cu reactanțele.

— Selsinul este cu poli înecați și întrefier constant, inductanțele mutuale între fazele de sincronizare statorice A, B, C nedepinzînd de poziția rotorului; la selsine cu poli aparenți și întrefier neuniform, rezultatele rămîn valabile dacă se înlocuiește reactanța fazei statorice X_s prin media geometrică a reactanțelor statorice după cele două axe $X_{d'}$, $X_{q'}$, reactanțele mutuale statorice fiind presupuse constante (rezultat confirmat experimental și parțial teoretic).

— Circuitul magnetic se consideră nesaturat, liniar, fără pierderi în fier, fapt ce impune alimentarea la o tensiune redusă în raport cu cea nominală.

Vom adopta de asemenea următoarele *notații*:

X_S — reactanța proprie a unei faze statorice

X_F — reactanța proprie a înfășurării rotorice

X_m — reactanța mutuală maximă între o fază statorică și înfășurarea rotorică

X_{mS} — reactanța mutuală între două faze statorice.

După cum se cunoaște, reactanțele mutuale dintre fazele statorice și înfășurarea rotorică, variază cu poziția θ a rotorului, după relațiile:

$$\begin{aligned} X_{AF} &= Xm \cos \theta \\ X_{BF} &= Xm \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ X_{CF} &= Xm \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Ecuațiile care caracterizează regimul permanent sinusoidal al schemei electrice din fig. 3, sînt:

$$\begin{aligned} &\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_S \\ &\underline{U}_i = jX_F\underline{I} + 2jX_S\underline{I}_S - jX_{BF}\underline{I}_S + jX_{CF}\underline{I}_S - \\ &\qquad - jX_{BF}\underline{I} + jX_{CF}\underline{I} - 2jX_{mS}\underline{I}_S \\ &\underline{U}i = jX_F\underline{I} + 2R\underline{I}_R - jX_{BF}\underline{I}_S + jX_{CF}\underline{I}_S \\ &\underline{U}_e = R\underline{I}_R - jX_S\underline{I}_S + jX_{BF}\underline{I} + jX_{mS}\underline{I}_S - jX_{AF}\underline{I} \end{aligned} \tag{3}$$

Ținînd seama de relațiile (2), de faptul că $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ și eliminînd din sistemul (3) curenții $\underline{I}$, $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, se obține pentru tensiunea de ieșire următoarea expresie:

$$\underline{U}_e = \underline{U}i \frac{A \cdot e^{j\gamma} \cdot \sin \alpha}{\cos^2\alpha - B + j \cdot [C \cdot \cos\alpha + D]} \tag{4}$$

în care s-au introdus notaţiile :

$$A \cdot e^{j\gamma} = \frac{X_S - X_{mS} - jR}{X_m}$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{X_F(X_S - X_{mS})}{X_m^2} \tag{5}$$

$$C = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R}{X_m}$$

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{X_m^2}[X_F + 2(X_S - X_{mS})]$$

Valoarea efectivă a tensiunii de ieşire este în acest caz :

$$U_e = U_i \cdot \frac{A \cdot \sin \cdot \alpha}{\sqrt{(\cos^2 \alpha - B)^2 + (C \cdot \cos\alpha + D)^2}}$$

Deoarece rezistenţele egale R au valori mult mai mari decît impedanţele uzuale ale selsinelor, expresiile tensiunii de ieşire pot fi simplificate, prin înlocuirea lor cu limitele care se obţin făcînd să tindă la infinit R. Experienţa confirmă acest punct de vedere căci se constată că varierea valorii lui R influenţează neglijabil valoarea tensiunii de ieşire.

Expresia (4) devine la limită ($R \to \infty$) :

$$\underline{U}_e = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \underline{U}_i \cdot \frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{X_F + 2(X_S - X_{mS})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot X_m}} \tag{4'}$$

Relaţia este valabilă şi între valorile efective, dacă se face abstracţie de semne.

Încă înainte de anul 1500, N. Cusanus a obţinut aproximaţia surprinzătoare pentru acele timpuri, dată de formula [3] :

$$\varphi \text{ [rad]} \cong \frac{3 \sin \varphi}{\cos\varphi + 2} \tag{7}$$

şi care este valabilă cu o precizie ridicată pentru unghiuri în intervalul $0 \ldots 80°$ $\left(\text{sub } 5\%, \text{ chiar la } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. Acest fapt explică proprietăţile schemei propuse în cazul cind avem îndeplinită relaţia :

$$\frac{X_F + 2(X_S - X_{mS})}{2\sqrt{3}X_m} = 2 \tag{8}$$

Deşi, în general, parametrii selsinelor nu îndeplinesc această condiţie decît cu totul accidental, se constată totuşi o bună aproximare cu o linie dreaptă a caracteristicii intrare-ieşire a acestora, funcţionînd în cadrul schemei propuse.

Pentru cazurile în care se pune problema alegerii dintre mai multe selsine, a aceluia care asigură liniaritatea cea mai pronunţată, sau pentru cazurile cînd se cere o proiectare specială a selsinului în vederea asigurării unei caracteristici cît mai liniare, se poate folosi atît condiţia (8) cît şi condiţii mai pretenţioase bazate pe expresia mai exactă (6), aplicabilă atunci cînd valorile rezistenţei R sînt comparabile cu cele ale impedanţelor selsinului.

Se poate arăta matematic, că o expresie de forma celei date de relaţia (6) se apropie cel mai mult de o dreaptă, atunci cînd avem îndeplinite condiţiile :

$$A^2 = B^2 + D^2 + (C^2 - 2B) + 2CD + 1$$

$$A^2 = 3(C^2 - 2B) + 3CD + 6 \qquad (9)$$

$$8A^2 = 60(C^2 - 2B) + 15\ CD + 300$$

Valoarea lui A se alege arbitrar, rezultînd valorile optime ale lui B, C şi D. Cum în expresiile lui A, B, C, D intervin patru parametri X_S, X_{mS}, X_F, X_m ai selsinului şi parametrul R al schemei, între X_S şi X_{mS} avînd o relaţie bine determinată, rezultă că problema este determinată.

4. Verificări experimentale

Schema propusă a fost experimentată de către autor în laboratorul de maşini electrice speciale al facultăţii de Electrotehnică din Institutul Politehnic Bucureşti, pe mai multe tipuri de selsine, obţinînd în toate cazurile o dependenţă liniară a tensiunii de ieşire cu unghiul de rotaţie în intervale mergînd pînă la $\pm 70 \ldots 80$ grade sexagesimale.

Dependenţa cea mai apropiată de o linie dreaptă s-a obţinut cu selsinul fabricat în U.R.S.S. tip СК—МГNr. 1490463, la care măsurarea experimentală a parametrilor la 50 Hz,a dus la următoarele valori : $X_q = 20{,}3$ ohmi, $X_d = 35{,}6$ ohmi, $X_F = 347$ ohmi, $X_m = 109$ ohmi. X_{mS} a fost luat egal cu $\frac{1}{2} X_S = \frac{1}{2}\sqrt{X_q X_d} = 13{,}45$ ohmi.

Valoarea tensiunii de alimentare s-a luat $U_i = 35$ V, iar rezistenţele R au avut valoarea 5 KΩ. Cu aceste date s-a calculat :

$$\frac{X_F + 2(X_S - X_{mS})}{2\sqrt{3}\, X_m} = 0{,}988$$

determinînd prin calcul caracteristica $U_e = f(\alpha)$ pe baza expresiei (4') şi comparînd-o cu cea ridicată direct, experimental. Rezultatele sînt date în tabelul de mai jos şi pe fig. 4.

	gr .	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$U_{e;\ exp.}$	V	0	1,4	2,92	4,42	6	7,55	8,94	10,5	11,7	12,8
$U_{e.\ calc.}$	V	0	1,32	2,66	4,04	5,5	7,0	8,7	10,5	12,7	15,1

Se constată că în intervalul 0...80°, cele două caracteristici se suprapun foarte bine, abaterile fiind de maximum 5%, cu totul admisibile avînd în vedere ipotezele adoptate.

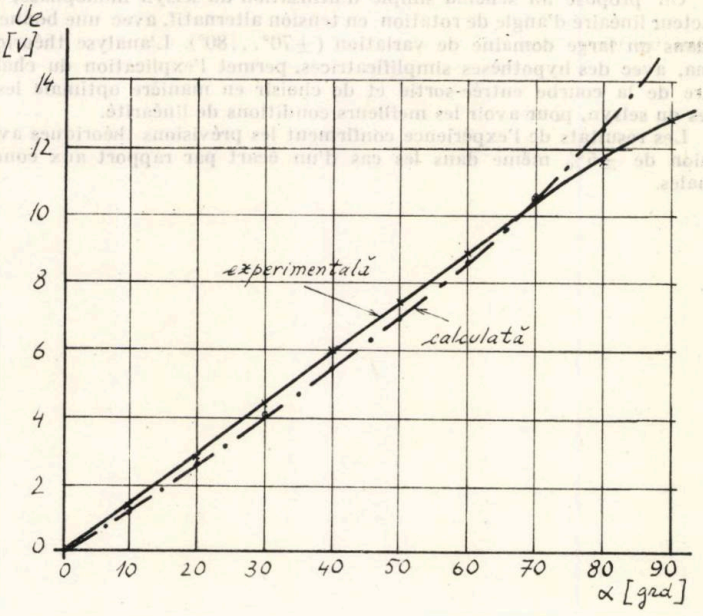


Fig. 4 — Caracteristica intrare-ieşire în regim staţionar pentru selsinul experimentat.

5. Concluzii

Schema propusă în prezenta lucrare, înlocuieşte cu succes schema clasică de folosire a selsinelor în regim „transformator" (traductor de unghi) prezentînd numeroase avantaje, cel mai important fiind simplitatea.

Deşi justificarea teoretică se bazează pe ipoteze destul de restrictive, experienţa arată că rezultatele teoretice concordă cu o foarte bună precizie, cu cele experimentale, în zona de liniaritate a caracteristicii intrare-ieşire şi aceasta chiar în condiţii diferite de cele optime.

Autorul speră că noua schemă îşi va găsi aplicaţii în sistemele de telecomandă şi telesemnalizare, ca şi în tehnica reglării automate, ca urmare a calităţilor ei evidente.

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Fransua*, Maşini şi cţionări electrice, Ed. did. şi ped., Bucureşti, pag. 450, 1967.
2. *M. Preda şi col.*, Bazele electrotehnicii, vol. I, Ed. did. şi ped., Bucureşti, pag. 257, 1 969
3. *R. Taton şi col.*, Istoria generală a ştiinţei, vol. II, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, pag. 25, 1971.
4. *E. V. Armenskii, G. B. Falk*, Electriceskie maşini, Moscova, 1975.
5. *D. A. Zavalişin ş. a.*, Electriceskie maşini maloi moşcinosti, Gosenergoizdat, Moscova, 1963

Un schéma d'utilisation des selsynes comme traducteurs linéaires de l'angle de rotation en tension alternatif

On propose un schéma simple d'utilisation du selsyn monophasé, comme traducteur linéaire d'angle de rotation en tension alternatif, avec une bonne linéarité dans un large domaine de variation ($\pm 70° \ldots 80°$). L'analyse théorique du schéma, avec des hypothèses simplificatrices, permet l'explication du charactère linéaire de la courbe entrée-sortie et de choisir en manière optimale les paramètres du selsyn, pour avoir les meilleurs conditions de linéarité.

Les resultats de l'expérience confirment les prévisions théoriques avec une précision de $\pm 5\%$ même dans les cas d'un écart par rapport aux conditions optimales.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN ANUL 1983

Mircea Covrig — Contribuții privind îmbunătățirea performanțelor funcționale ale seriilor de motoare asincrone. (18.III.1983).

Felicia Anghel — Supratensiuni în transportoare. (31.III.1983).

Ion Bivol — Contribuții privind modelizarea mașinilor electrice și identificarea caracteristicilor lor dinamice. (10.VI.1983).

Petru Notingher — Contribuții privind studiul solicitatorilor materialelor electroizolante din mașinile electrice. (17.VI.1983).

Mihai Octavian Popescu — Stingerea arcului electric în aparatele de comutație de joasă tensiune. (24.VI.1983).

Petre Ciureanu — Contribuții la creșterea vitezei de transfer a datelor (4.VII.1983)

Elisabeta Potolea — Contribuții la studiul echivalenților pentru sisteme electrice automatizate. (6.VII.1983).

Costin Cepișcă — Contribuții la studiul fenomenelor electromagnetice din aparatele de inducție. (25.X.1983).

Grigore Pavel Curiac — Predeterminarea parametrilor rotorului mașinii electrice de inducție cu bare de secțiune poligonală în regim sinusoidal. (28.X.1983).

Mohamed Kheir Turkmani — Transmisia energiei electromagnetice pe linii electrice. (26.XI.198

Corina Flueraşu — Contribuții la studiul încălzirii inductive a corpurilor feromagnetice (13.XI 1983).

c. 1616 — I. P. Informația

ORSZÁGOS MŰSZAKI INFORMÁCIÓS KÖZPONTE KÖNYVTÁR 1883

40 480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЁТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ – САМОЛЁТОСТРОЕНИЕ, ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов. „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и «Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continues les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
ROMÂNIA
Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

1984 MAJ 25

Lei 35